σχετικά με το Δ1

και λίγα σχόλια στην έννοια

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

είναι

ένα έγκυρο σύνολο επιχειρημάτων και

προτάσεων , με τις οποίες δικαιολογούμε

την αλήθεια ενός ισχυρισμού.

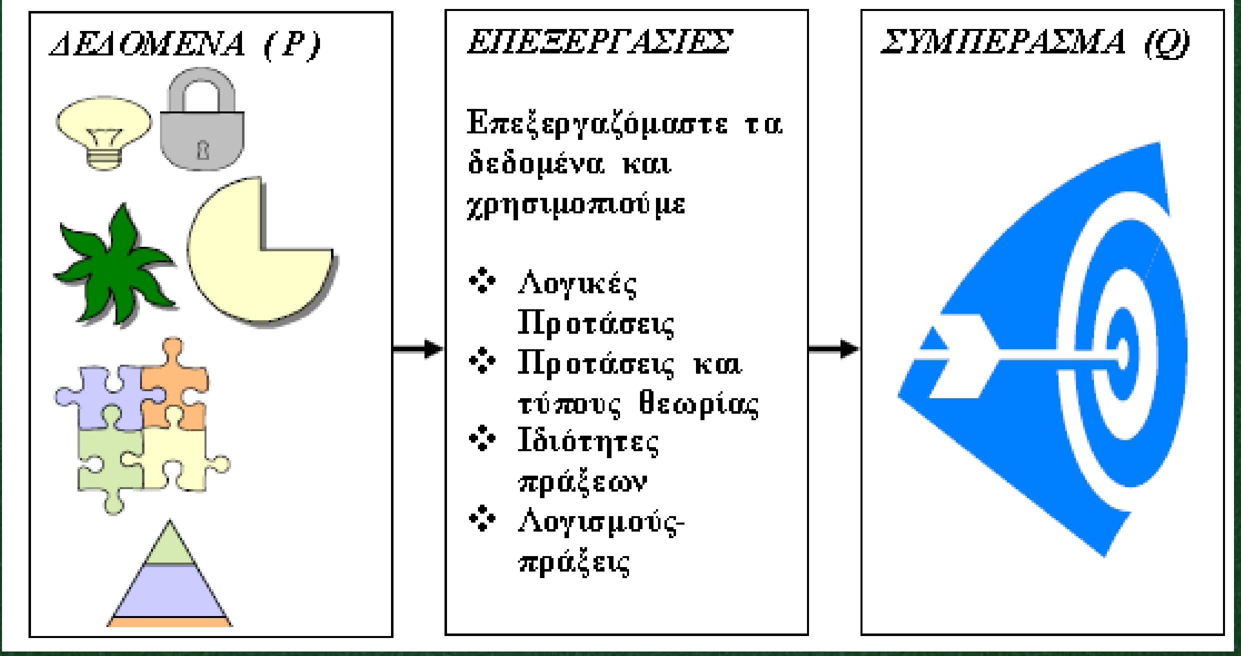
ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΣΥΝΘΕΣΗ)

Ξεκινάμε από τα δεδομένα και με μια σειρά λογικών βημάτων φτάνουμε στο συμπέρασμα.. Σε αυτή τη σειρά των λογικών βημάτων λαμβάνουμε υπόψη γνωστά θεωρήματα , ορισμούς και αξιώματα.

Είναι καλό να χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το **P** (δεδομένα) είναι σύνθετο και το **Q** (ζητούμενα) είναι απλό.

$$\underset{\text{συνθετο}}{P} \Rightarrow \underset{\text{απλο}}{Q}$$

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή p → q, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι αληθής τότε και η q είναι αληθής.



ΣΧΕΤΙΚΑ

με την βαθμολόγηση και μοριοδότηση λαμβάνονται υπόψη

→ οδηγίες ΚΕΓΕ

→ απόφαση μοριοδότησης (ψηφοφορία βαθμολογητών)

→ ορθότητα και πληρότητα των προτάσεων που χρησιμοποιούνται (όσες δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο , πρέπει να αποδεικνύονται) και γενικά ΄΄ ο μαθητής(–τρια) , να μας πείθει ΄΄ .

→ πιθανή Υπουργική Απόφαση που ρυθμίζει διάφορες ασάφειες βαθμολόγησης κλπ

παράδειγμα (πανελλαδικές Β ΓΕΛ 2004)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $α=12k-5$, όπου $k \in Z$.

Α. Να αποδείξετε ότι ο $α$ είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

Α. Έχουμε
$α=12κ-5 = 12κ - 6 + 1 = 2(6κ-3) + 1$
$= 2ρ + 1$ (με $ρ = 6κ - 3 \in Z$, αφού $κ \in Z$). Άρα ο α είναι περιττός αριθμός.

λύση 2η: $α = \cancel{12κ-5 = (12κ-4) - 1} \rightarrow$

$α = \underbrace{\cancel{2(6κ-2)-1}}_{ρ} \rightarrow α = 2ρ - 1$

άρα α περιττός

ΣΧΟΛΙΟ

$α = 2κ$, $κ \in \mathbf{Z}$ και λέγεται **άρτιος**,

$α = 2κ + 1$, $κ \in \mathbf{Z}$ και λέγεται **περιττός**.

Σχολικό Β' ΚΑΤ σ. 143

- οι μαθητές που έκαναν τη 2η λύση έχασαν 2-3 μόρια
- Πολλά παιδιά είχαν διδαχθεί ότι ένας περιττός συμβολίζεται με $2κ+1$, $2λ-1$ και

παράδειγμα (πανελλαδικές Γ ΓΕΛ 2008)

ΘΕΜΑ 1°

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ. 63α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta) \text{ (Σχ. 63β)}$$

Link https://www.youtube.com/watch?v=f6tPHQkPw2A&t=290s

Σε πλήθος γραπτών εμφανίστηκε η απάντηση: (δυστυχώς αυτό διδάχθηκαν)

~~η f συνεχής στο [α,β] όταν:~~

~~→ είναι συνεχής στο (α,β)~~

~~→ " " στα x=α, x=β~~

εδώ οι μαθητές έχαναν 2 μόρια

● για το θέμα του 2004 ,ένας περιττός θα μπορούσε να γραφτεί σαν 2κ-1 και γιατί όχι και σαν 2λ+2023 ; Είναι έτσι εναρμονισμένο με την απόδειξη του σχολικού σ. 143 ;

● για το ερώτημα του 2008 (μπήκε και το 2017 και κάποιες φορές σαν Σ-Λ) πολλοί συνάδελφοι υπερασπίστηκαν με πάθος την $2^{η}$ απάντηση ,την οποία και θεωρούσαν ΄΄πλήρη΄΄ γιατί η συνάρτηση έχει ΠΟ το κλειστό ,άρα ισχύει ο ορισμός του σχολικού σελίδα 71

> Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

● Όμως το σχολικό δεν αναφέρει πουθενά το κλειστό σαν Π.Ο.

Στην σ.73 γράφει →

> **Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα**
>
> Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

Άρα το κλειστό είναι διάστημα του ΠΟ

εν κατακλείδι

Οι 2 προηγούμενες απαντήσεις έχαναν μονάδες γιατί ήταν έλλειπείς και δεν είχαν σύμπλευση με το σχολικό βιβλίο.

παράδειγμα (πανελλαδικές Γ ΓΕΛ 2023)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \text{όπου } \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Α λύση –πλήρης (δική μου ,έγινε στις 6-6-2023)

Δ1. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k-2x}{x-1}$

Έχουμε απρ/στία $\frac{k-3}{0}$

● αν $\boxed{k\neq 3}\to k-3\neq 0\to$ έχουμε απρ/στία $\frac{a}{0}$ κ παίρνουμε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\pm\infty$

ΑΤΟΠΟ , λόγω υπόθεσης

● αν $\boxed{k=3}$ έχουμε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3-2x}{x-1}\ \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2-x}(-1)+\frac{1}{x^2}+0-2}{1-0}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}-2\right)=$$

$$\frac{1}{-1}+1-2=-2\ \in\mathbb{R}$$

Άρα $k=3$

Β λύση (ελλειπής)

ελλειπής;
πιθανή
απώλεια
μονάδων

- έχουμε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$.

- Έστω $\frac{f(x)-2x}{x-1}=g(x) \to f(x)=(x-1)g(x)+2x \quad (1)$

  Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$, άρα και στο $x_0=1$. Είναι

  $\lim_{x\to 1} f(x) \overset{(1)}{=} \lim[(x-1)\underbrace{g(x)}_{\in\mathbb{R}}+2x] \overset{υποθ}{\Rightarrow}$

  $\ln(2-1)-\frac{1}{1}+k=0\cdot\ell+2\cdot 1 \Rightarrow k=3$

Βρήκαμε $k=3 \to$ δεν σημαίνει ότι τελειώσαμε. Πρέπει να δικαιολογήσουμε την ορθότητα του αποτελέσματος!

Ο παραπάνω "αλγόριθμος" δεν είναι πλήρης αφού για $k=3 \not\Rightarrow$ ότι $\lim_{x\to 1} g(x)\in\mathbb{R}$

Β λύση (πλήρης)

- έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$.

- Έστω $\frac{f(x)-2x}{x-1}=g(x) \to f(x)=(x-1)g(x)+2x$ (1)

  Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$, άρα η στο $x_0=1$. Είναι

  $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \overset{(1)}{=} \lim[(x-1)g(x)+2x] \overset{\text{υπόθ}}{\Rightarrow}$

  $\ln(2-1)-\frac{1}{1}+k=0\cdot\ell+2\cdot 1 \Rightarrow k=3$

- για $k=3$ έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\dots=-2\in\mathbb{R}$

- Άρα $k=3$ (δεκτή)

Γ λύση (ελλειπής)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,2)$ συνεπώς και στο 1

Άρα: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)-2x}{x-1}(x-1)+2x\right]=2$

$\Rightarrow \ln 1-1+k=2 \Rightarrow k=3.$

Ελλειπής λύση (με πιθανή απώλεια μονάδων)

πάλι βρήκαμε ότι $k=3$

Δεν σημαίνει ότι τελειώσαμε !

Αφού η f είναι συνεχής, πράγματι το όριο μέσα στην αγκύλη υπάρχει κ είναι 2

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι υπάρχει κ το όριο του $\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$. Δηλαδή ότι

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$ κ να συμφωνεί με την υπόθεση !

Γ λύση (πλήρης)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,2)$ συνεπώς και στο 1.

Άρα: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)-2x}{x-1}(x-1)+2x\right]=2$

$\Rightarrow \ln 1-1+k=2 \Rightarrow k=3.$

- Πράγματι για κ=3 έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}=\ldots=-2 \in R$

- Άρα η τιμή **κ=3** είναι δεκτή

συμπέρασμα

η ορθότητα της απόδειξης μιας πρότασης της μορφής ΄΄ αν P τότε Q ΄΄

P → Q , στηρίζεται

- στην εγκυρότητα των επιχειρημάτων
- την ορθότητα και σαφήνεια των προτάσεων.
- την ΄΄αλήθεια΄΄ της πρότασης Q σε σχέση με την λογική και την υπόθεση P .

ευχαριστούμε

για την ανάγνωση (ή παρακολούθηση)

του PDF (Video)

Βαγγέλης Νικολακάκης