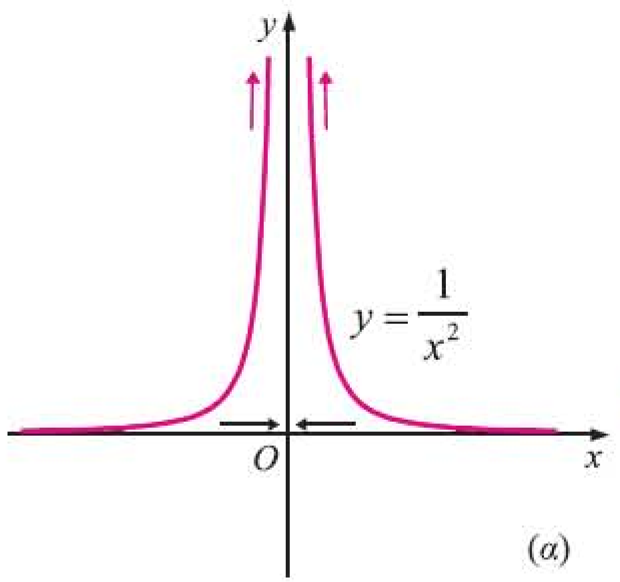
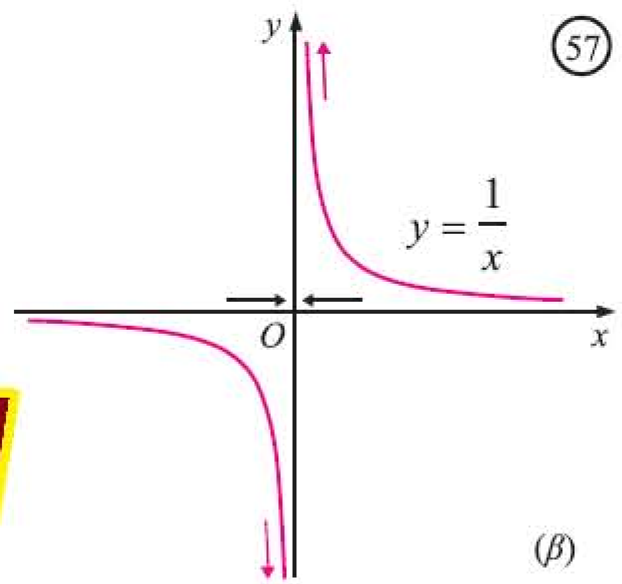
• Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο $x_0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.



(α)

57



(β)

οι παραπάνω 2 περιπτώσεις σε συνδιασμό με α>0 ή α<0 ,συνθέτουν 4 περιπτώσεις και την θρυλική απροσδιοριστία α προς 0

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa,\ \text{όπου } \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει: $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$. **Μονάδες 4**

Δ1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k - 2x}{x-1}$

Έχουμε απρ/στία $\dfrac{k-3}{0}$

• αν $\boxed{k\neq 3} \to k-3 \neq 0 \to$ έχουμε απρ/στία $\dfrac{a}{0}$ κ παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1} = \pm\infty$

ΑΤΟΠΟ, λόγω υπόθεσης

1

2

• αν $\boxed{k=3}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 - 2x}{x-1} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{2-x}(-1) + \frac{1}{x^2} + 0 - 2}{1-0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x^2} - 2\right) =$

$\dfrac{1}{-1} + 1 - 2 = -2 \in \mathbb{R}$

Άρα $k=3$

Η επαλήθευση στην 2η ή 3η λύση ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ, γιατί έτσι λειτουργεί η $p \Rightarrow q$. Αληθές το q σε "σχέση" με το p



**3.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\boxed{f(x) = \frac{(\lambda-1)x^2 + x - 2}{x^2-1}} \text{ και } g(x) = \frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)} \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x).$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

εδώ χρειάζεται διερεύνηση ώστε να υπάρχουν τα όρια

1.6 Λύσεις των ασκήσεων

**3.** Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 1}[(\lambda-1)x^2 + x - 2] = \lambda - 2.$$

— Αν $\lambda - 2 > 0$ δηλαδή αν $\lambda > 2$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της $f$ στο 1.

— Αν $\lambda - 2 < 0$ δηλαδή αν $\lambda < 2$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει όριο της $f$ στο 1.

— Αν $\lambda = 2$, τότε $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+2}{x+1}$, με $x \neq 1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$.

Επομένως το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ μόνο αν $\lambda = 2$.



**σχόλια**

1

• αν $\boxed{k\neq 3}$ τότε έχουμε τις 4 περιπτώσεις (σχολικό σ. 60) που με οδηγούν σε όριο $+\infty$ ή $-\infty$ που είναι ΑΤΟΠΟ λόγω υπόθεσης. Η αναφορά σε κάθε περίπτωση χωριστά, δεν έχει νόημα αφού γνωρίζω την ΥΠΑΡΞΗ του ℓ δεν το αναλύω ;

2

• αν $\boxed{k=3}$ → αποδεικνύω την ύπαρξη ορίου (δεν "λειτουργεί" κανένα νόημα) λειτουργεί ;