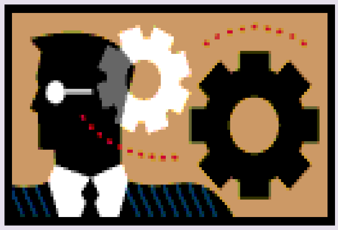
Βαγγέλης Νικολακάκης

μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



προσανατολισμού

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

βιβλιομάθημα 3ο
- ολοκληρώματα -

2023

- **ερωτήσεις θεωρίας με όλες τις αποδείξεις**
- **ερωτήσεις Σ-Λ**
- **συνοπτική μεθοδολογία** (με ασκήσεις εμπέδωσης της)
- **θέματα προσομοίωσης επιπέδου εξετάσεων**

έκδοση 3η

η επανάληψη μου - 3

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Αντί Προλόγου

- **Το παρόν βιβλίο αφορά την τρίτη επανάληψη στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου (Ολοκληρώματα - Κεφάλαιο 3)**
- **Όλο τα έργο αποτελείται από 4 Βιβλιομαθήματα , όπου :**

☞ **οι επαναλήψεις 1 – 3 έχουν την δομή του παρόντος βιβλίου και αφορούν τα αντίστοιχα κεφάλαια του σχολικού βιβλίου .**

☞ **η επανάληψη 4 έχει διάρθρωση με θέματα Α – Β – Γ – Δ και διαγωνίσματα , όλα επιπέδου Πανελλαδικών Εξετάσεων .**

- **Φιλοδοξία μας δε είναι**

οι μαθητές Γ Λυκείου να πορευτούν με απόλυτη επιτυχία στις Πανελλαδικές και την εισαγωγή τους σε σχολή της αρεσκείας τους .

Βαγγέλης Α Νικολακάκης
ΑΘΗΝΑ
Κιν 6937020032

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Για την γρήγορη εύρεση των περιεχομένων ,κλικάρετε δεξιά και μεταβαίνετε στην αντίστοιχη σελίδα και αντίστροφα έρχεστε στα περιεχόμενα .

ΠΩΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. **Διαβάζουμε ότι έχουμε διδαχθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο.**
2. **Μελετούμε πολύ προσεκτικά τις ερωτήσεις και τις αποδείξεις πού υπάρχουν στο παρόν επαναληπτικό βιβλίο (Κεφάλαιο – 1) .Οι ερωτήσεις που έχουν σκιαγραφηθεί ,είναι SOS αποδείξεις για τις εξετάσεις !**
3. **Ελέγχουμε τις γνώσεις μας στην θεωρία απαντώντας στις ερωτήσεις Σ-Λ , (ενότητα Β). Στην συνέχεια ελέγχουμε την ορθότητα των απαντήσεων μας στην ενότητα Β-α (σελίδα 21)**
4. **Μελετούμε πολύ καλά τις μεθόδους και τις ασκήσεις για εμπέδωση τους στο κεφάλαιο 2 (σελίδες 23-65)**
5. **Κάνουμε εξάσκηση στα ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ του 3^{ου} κεφαλαίου (σελίδα 66 και αφορούν μαθητές προχωρημένου επιπέδου που στοχεύουν υψηλές βαθμολογίες) . Στην συνέχεια ελέγχουμε την ορθότητα των λύσεων μας στην ενότητα Β (σελίδες 75 – 101)**

Καλή σας Επιτυχία !

1 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ-ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Α ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ θεωρίας και τυπολόγιο

1. Τι ονομάζουμε Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα της f στο διάστημα Δ** ;

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο διάστημα *Δ*** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν *F* είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, τότε: α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$ είναι παράγουσες της f στο *Δ* και β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο *Δ* παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$.

Απόδειξη

α) κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in$R, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

3. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο [α,β] ;

Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] τότε ορίζουμε : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

Επίσης ορίζουμε : $\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος ;

Έστω f,g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in$R. Τότε ισχύουν

α) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$ β) $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

γ) $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

δ) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

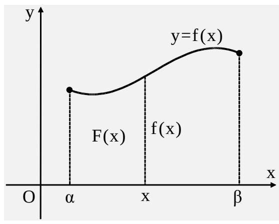
ε) Έστω *f* μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

5. Τι γνωρίζετε για τη συνάρτηση $\mathrm{F(x)} = \int_\alpha^x \mathrm{f(t)dt}$; Ποια είναι η παράγωγος της ; Στη συνέχεια να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου της.

- Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, $x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*. Δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{F'(x)} = \left(\int_\alpha^x \mathrm{f(t)dt}\right)' = \mathrm{f(x)}, \quad \text{για κάθε} \quad x\in\Delta .$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:



$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου Ω.

$\approx f(x)\cdot h$, για μικρά $h>0$. Άρα, για μικρά $h>0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$, οπότε $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$

6. Έστω f(x) μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f(x) στο [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{f(t)dt} = \mathrm{G(\beta)} - \mathrm{G(\alpha)}$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in$R τέτοιο, ώστε :

$G(x)=F(x)+c$ (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$,

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

7. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

α) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

8. Α. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της *f*, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$,όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής .

Β. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$

Α. Ισχύει : $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$

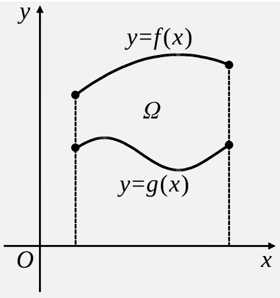
Β. Ισχύει : $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$

9. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο :

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

Απόδειξη

Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και *Ω* το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$



Παρατηρούμε ότι

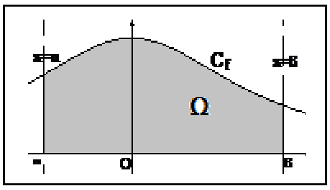
$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\ .$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΧΩΡΙΟΥ

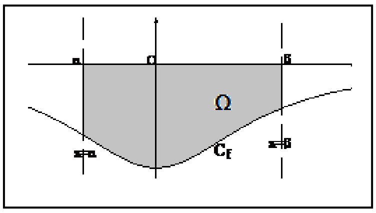
Α. Χωρίο που ορίζεται από την γρ. παράσταση της f , τον άξονα χ΄χ , και τις ευθείες x=α και x=β

1. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$



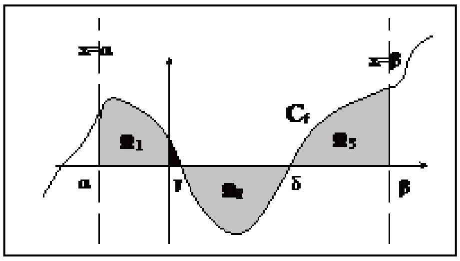
τότε $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

2. Αν $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$



τότε $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

3.Αν η f δεν διατηρεί πρόσημο στο [α , β] τότε το εμβαδό είναι το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων στα διαστήματα που η f είναι θετική ή αρνητική.



$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx+\int_{\gamma}^{\delta} -f(x)dx+\int_{\delta}^{\beta} f(x)dx$$

όπου γ ,δ οι ρίζες της f στο διάστημα [α ,β]

Β. Χωρίο που ορίζεται από τις γρ. παραστάσεις των f , g , τον άξονα χ΄χ , και τις ευθείες x=α και x=β

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$

B ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ Σ-Λ ΣΥΝΑΡΤΗΣΩΝ

- **Οι ερωτήσεις με κόκκινη αρίθμηση θέλουν περισσότερη προσοχή γιατί δεν είναι άμεσες συνέπειες του σχολικού βιβλίου**
- **Οι συναρτήσεις στα ορισμένα ολοκληρώματα θα θεωρούνται συνεχείς στα διαστήματα που ορίζουν τα άκρα [α,β] [γ,δ],…**

1. Η συνάρτηση F (x) = xlnx - x είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f (x) = lnx

2. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

3. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c

4. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+5}{x^2+2}$ **δεν** έχει παράγουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

5. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει ο τύπος $\int_\alpha^\beta f'(x)g'(x)\,dx=\left[f'(x)g(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx$.

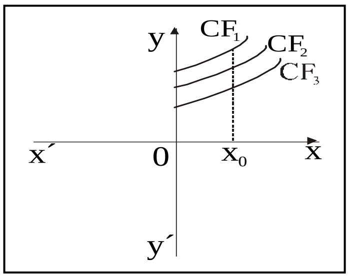
6. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, θα ισχύει $\int_\alpha^\beta\left[f(x)g(x)\right]'dx=\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta$.

7. Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)$.

8. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τότε θα ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f''(x)dx=f'(\beta)-f'(\alpha).$$

9. Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών F_1, F_2, F_3 μιας συνάρτησης f, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, έχουν παράλληλες εφαπτομένες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.



10. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F (x) = e^x + c, έχουν εφαπτόμενες παράλληλες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.

11. Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx=\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta g(x)dx\right)$.

12. Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta \dfrac{x^2-4x}{x^3+1}dx=\dfrac{\int_\alpha^\beta (x^2-4x)dx}{\int_\alpha^\beta (x^3+1)dx}$.

13. Αν $f'(x)=\dfrac{1}{g'(x)}$, τότε $\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g'(x)dx=\beta-\alpha$.

14. Ισχύει: $\int_0^{\alpha} x\, f'(x)\, dx = \alpha f(\alpha) - \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$.

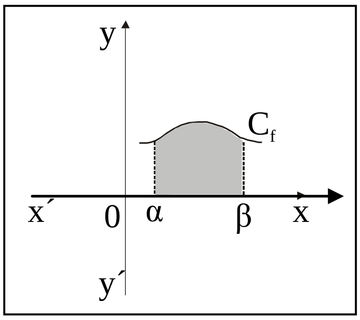
15. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

16. Ισχύει: $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)\, g(x)\, dx$.

17. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$.

18. Ισχύει $\int_2^4 c dx = \int_6^8 c dx$,όπου **c** σταθερά.

19. Το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + c,\ c \neq 0$



20. Αν f συνεχής στο R και f (10) = 100, τότε ισχύει: $100 = f(0) + \int_0^{10} f'(x)dx$.

21. Αν ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$,τότε και $f(x)=g(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$

22. Αν για την συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$,τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = 0$

23. Ισχύει: $\int_0^1 \eta\mu x dx = 1 - \sigma\upsilon\nu 1$.

24. Αν $A = \int_0^2 f(x)dx$, τότε: $\int_0^2 f(\omega)\, d\omega + \int_2^0 f(t)\, dt + \int_0^2 (3 f(z) - 4)\, dz = 3A - 8$

25. Αν α > β, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} (e^x + 1)\, dx > 0$.

26. Αν f (x) > 0, τότε ισχύει $\int_1^{\ln 2} f(x)dx > 0$.

27. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β].

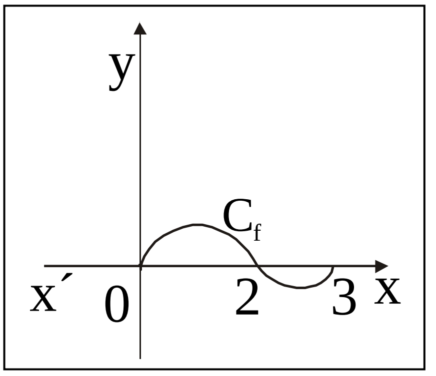
28. Αν f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β] τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

29. Αν f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β] τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > 0$

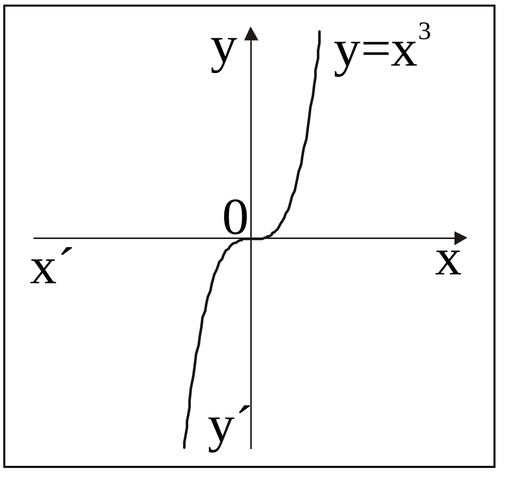
30. Αν f (x) ≤ g (x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε θα ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

31. Αν α < β, τότε ισχύει ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.

32. Αν η f είναι συνεχής στο [1, 3], τότε ισχύει ότι
$\int_{1}^{3} f(x)dx < \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx$.



33. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι: $\int_{0}^{2} f(x)dx < \int_{0}^{3} f(x)dx$.



34. Ισχύει ότι : $\int_{0}^{2\pi} ημx\,dx = 0$.

35. Για τη συνάρτηση του σχήματος, ισχύει ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$, για κάθε α > 0

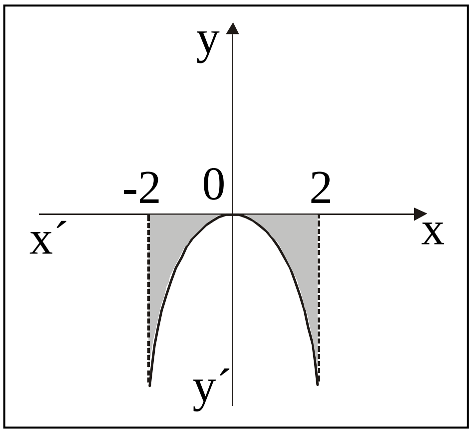
36. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών x = α, x = β.

37. Ισχύει ότι : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 4συν^3 x)dx > 0$.

38. Η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$, ισχύει μόνο εφόσον α < γ < β.

38. Ισχύει ότι : $\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} e^x dx = \beta - \alpha$, α, β > 0.

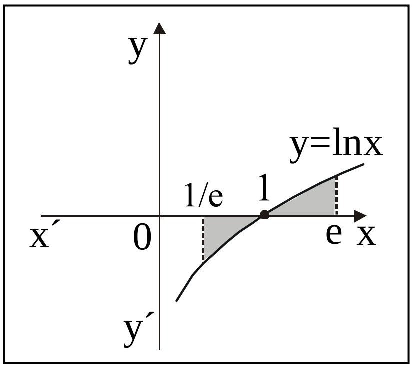
40. Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου
που φαίνεται στο σχήμα,
ισχύει: $E = -\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.



41. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και f (0) = f (1), τότε $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0$.

42. Αν $\int_0^5 f(x)\,dx = 10$, το ελάχιστο της f στο
διάστημα [0, 5] δεν μπορεί να είναι 3.

43. Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος
είναι ίσο με το $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\,dx$.



44. Ισχύε ότι ι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x συνe^x\,dx = [ημe^x]_0^{\pi/2}$.

45. Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g'(x)\,dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_\alpha^\beta$

46. Δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(2 - ημ^8 x)\,dx$.

47. Αν $\alpha < \beta$, τότε $\left|\int_\alpha^\beta ημx\,dx\right| \le \beta - \alpha$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ Σ - Λ

1.→ Σ

2.→ Λ

3.→ Σ

4. → Λ

5.→ Σ

6. → Σ

7.→ Σ

8. → Σ

9. → Σ

10. → Σ

11. → Λ

12. → Λ

13. → Σ

14. → Σ

15. → Σ

16. → Λ

17. → Σ

18. → Σ

19. → Λ

20. → Σ

21. → Λ

22. → Σ

23. → Σ

24. → Σ

25. → Σ

26. → Λ

27. → Λ

28. → Σ

29. → Λ

30. → Σ

31. → Σ

32. → Λ

33. → Λ

34. → Σ

35. → Σ

36. → Λ

37. → Σ

38. → Λ

38. → Σ

40. → Σ

41. → Σ

42. → Λ

43. → Σ

44. → Λ

45. → Σ

46. → Λ

47. → Σ

2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ...στα γρήγορα
...και ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ...για εμπέδωση της

Α πως να εργαστούμε στις ασκήσεις

► Μελετούμε πολύ προσεκτικά τις μεθόδους και τα λυμένα παραδείγματα.
Τα θέματα στην ενότητα **2** με τις αντίστοιχες μεθόδους είναι τα **βασικά** του κεφαλαίου και η προσεκτική μελέτη τους θα ΄΄φρεσκάρει΄΄ τις γνώσεις μας στο κεφάλαιο 3 .

► Τα θέματα στην ενότητα **3** είναι μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας ,απευθύνονται σε μαθητές που έχουν κάνει καλή προετοιμασία ,είναι δε συνδιαστικά -προσομοίωσης ,δηλαδή **επιπέδου εξετάσεων** .

► Αξίζει εδώ να τονίσουμε ότι συνήθως το κεφάλαιο 3 ΄΄δίνει΄΄ θέμα στις εξετάσεις ,συνήθως ως εξής :

- **Β Θέμα** με υπολογισμούς ολοκληρωμάτων - εμβαδών
- **Γ-Δ Θέμα** με ερωτήματα αντίστοιχου επιπέδου δυσκολίας – συνδιαστικά – ανισότητες κλπ.

SOS ασκήσεις

Εδώ δεν προτείνουμε SOS ασκήσεις του σχολικού (όπως τα άλλα δύο βιβλιομαθήματα)

☞ Στοχεύουμε στην αποφυγή σύγχισης ,αφού πολλές ακήσεις του σχολικού στο κεφάλαιο 3 δεν έχουν συμβατότητα με την νέα ύλη

☞ στην ενότητα 2 έχουμε περιλάβει τις κυριότερες SOS ασκήσεις του σχολικού

1Α. εύρεση παράγουσας (αρχικής συνάρτησης)

Α. Η συνάρτηση F λέγεται παράγουσα της f που ορίζεται στο διάστημα Δ όταν : $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Β. Αναζητούμε παράγουσα μιας συνάρτησης f

- χωρίς να μας ενδιαφέρει αν η f είναι συνεχής ή όχι.
- απαραίτητα όμως η f να ορίζεται σε διάστημα
- αν όμως η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων,τότε βρίσκουμε παράγουσα για κάθε περιορισμό της στο αντίστοιχο διάστημα.

Γ. Ο υπολογισμός παραγουσών στηρίζεται επί της ουσίας σε δύο βασικούς παράγοντες.

- Ιδιότητες-πράξεις παραγουσών
- Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

Γ1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ-ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

Αν F και G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα στο διάστημα Δ και $\lambda, \mu \in R$,τότε

- Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ στο Δ
- Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf στο Δ
- Η συνάρτηση $\lambda F + \mu G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\lambda f + \mu g$ στο Δ

Γ2. ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

συνάρτηση f	**παράγουσες** $G = F + c$
0	c
1	$x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \in R - \{-1\}$
x^{ν}	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c \quad \nu \in N$
$\frac{1}{x^{\nu}} = x^{-\nu}$	$\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c \quad \nu \in N^* - \{1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\sqrt[\nu]{x^{\mu}}=x^{\frac{\mu}{\nu}}$	$\frac{x^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1}+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$-\sigma\varphi x+c$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$
$\varepsilon\varphi x$	$-\ln\lvert\sigma\upsilon\nu x\rvert+c$
e^x	e^x+c
α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c\ ,\alpha>0$
$\ln x$	$x\ln x-x+c$
$\frac{1}{x\ln 10}$	$\log x+c$

εφαρμογή 1Α.1

Να βρείτε τις παράγουσες F των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=4x^3-3x^2+2x-3$ **β.** $f(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x$

γ. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3},x>0$ **δ.** $f(x)=5^x-\eta\mu x$

λύση

α. Οι παράγουσες της $f(x)=4x^3-3x^2+2x-3$

είναι (φανερά) οι συναρτήσεις $F(x)=x^4-x^3+x^2-3x+c$,όπου $c\in R$.

β. Οι παράγουσες της $f(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x$

είναι οι συναρτήσεις , $F(x)=e^x+\eta\mu x+c$, όπου $c\in R$.

γ. Οι παράγουσες της $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}+x^{-3}$ στο $(0,+\infty)$

είναι οι συναρτήσεις , $F(x)=\ln|x|+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c=\ln x-\frac{1}{2x^2}+c$ όπου $c\in R$.

δ. Οι παράγουσες της $f(x)=5^x-\eta\mu x$

είναι οι συναρτήσεις , $F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}+\sigma\upsilon\nu x+c$ όπου $c\in R$.

εφαρμογή 1Α.2

Να βρείτε τις παράγουσες F των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(x-1)^5+\frac{1}{x}$, $x>0$ **γ.** $f(x)=\sqrt{2x-6}+\frac{1}{x-3}$, $x>3$

β. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{x-1}$, $x<-1$ **δ.** $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[5]{(x-1)^3}$, $x>1$

λύση

Έστω F οι συναρτήσεις που είναι παράγουσες της συνάρτησης f .Έχουμε

α) $f(x)=(x-1)^5+\frac{1}{x}$

οπότε $F(x)=\frac{(x-1)^{5+1}}{5+1}+\ln|x|c=\frac{1}{6}\cdot(x-1)^6+\ln x+c$

β) $f(x)=\sqrt{2x-6}+\frac{1}{x-3}=(2x-6)^{1/2}+\frac{1}{x-3}$ οπότε

$$F(x)=\frac{(2x-6)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\ln|x-3|+c=\frac{(2x-6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\ln(x-3)+c=\frac{2}{3}+\ln(x-3)+c$$

γ) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{x-1}=(x+1)^{-5}+\frac{1}{x-1}$,οπότε

$$F(x)=\frac{(x+1)^{-5+1}}{-5+1}+\ln|x-1|+c=\frac{(x+1)^{-4}}{-4}+\ln(-x+1)+c\Rightarrow$$

$$F(x)=-\frac{1}{4(x+1)^4}+\ln(-x+1)+c$$

δ) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[5]{(x-1)^3}=x^{1/2}+(x-1)^{3/5}$ οπότε

$$F(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{(x-1)^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+c=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{(x-1)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{8}(x-1)^{\frac{8}{5}}+c$$

εφαρμογή 1Α.3

Να βρείτε τις παράγουσες F των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=3e^{x+1}+\dfrac{5}{\eta\mu^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\quad , x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$

β. $f(x)=\left(\dfrac{1}{(x-3)^5}+\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)e^{10\ln(x-3)}\quad ,x>3$

γ. $f(x)=3(x-1)^2+10^{2+4\log(x-1)}+\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ x>1$

δ. $f(x)=5(x-4)^4+e^{\ln(x-2)}\ ,\ x>2$

λύση

Έστω F οι συναρτήσεις που είναι παράγουσες της συνάρτησης f. Έχουμε

α) $f(x)=3e^{x+1}+\dfrac{5}{\eta\mu^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

οπότε $F(x)=3e^{x+1}+5\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+c$

β) $f(x)=\left(\dfrac{1}{(x-3)^5}+\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)e^{10\ln(x-3)}=\left(\dfrac{1}{(x-3)^5}+\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)\left(e^{\ln(x-3)}\right)^{10}=$

$=\left(\dfrac{1}{(x-3)^5}+\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)(x-3)^{10}=(x-3)^5+(x-3)^7$,οπότε

$F(x)=\dfrac{(x-3)^{5+1}}{5+1}+\dfrac{(x-3)^{7+1}}{7+1}+c=\dfrac{1}{6}(x-3)^6+\dfrac{1}{8}(x-3)^8+c$

γ) $f(x)=3(x-1)^2+10^{2+4\log(x-1)}+\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=$

$=3(x-1)^2+10^2\left(10^{\log(x-1)}\right)^4+\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=3(x-1)^2+100(x-1)^4+\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,οπότε

$F(x)=3\dfrac{(x-1)^{2+1}}{2+1}+100\dfrac{(x-1)^{4+1}}{4+1}+\dfrac{\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+c\Rightarrow$

$F(x)=(x-1)^3+20(x-1)^5+\dfrac{1}{2}\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+c$

δ) $f(x)=5(x-4)^4+e^{\ln(x-2)}=5(x-4)^4+x-2$,οπότε

$F(x)=5\dfrac{(x-5)^{4+1}}{4+1}+\dfrac{x^2}{2}-2x+c=(x-5)^5+\dfrac{1}{2}x^2-2x+c$

1B. εύρεση παράγουσας από πράξεις

Αν οι δοσμένες συναρτήσεις έχουν προκύψει από παραγώγιση γινομένων , πηλίκων ή σύνθετων συναρτήσεων , τότε χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες πράξεων παραγουσών και τον παρακάτω πίνακα.

μορφή συνάρτησης	μορφή παράγουσας
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$f(x)g(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
$-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$	$\frac{1}{g(x)}$
$f(x)+x\,f'(x)$	$x\,f(x)$
$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$	$\frac{f(x)}{x}$
$[f'(x)+f(x)g'(x)]e^{g(x)}$	$f(x)e^{g(x)}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$f^{\alpha}(x)f'(x)$	$\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ $\alpha\in R-\{-1\}$
$\frac{f'(x)}{f^{\nu}(x)}=f'(x)f^{-\nu}(x)$	$\frac{f^{-\nu+1}(x)}{-\nu+1}$ $\nu\in N^*-\{1\}$
$f(g(x))g'(x)$	$f(g(x))$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}$
$\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{1}{f(x)}$
$f'(x)\eta\mu f(x)$	$-\sigma\upsilon\nu f(x)$
$f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)$	$\eta\mu f(x)$
$\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$	$-\sigma\varphi f(x)$
$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$	$\varepsilon\varphi f(x)$
$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
$f'(x)\alpha^{f(x)}$	$\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}$

σχόλιο
Θα πρέπει να μελετηθούν πολύ καλά τόσο οι παραπάνω τύποι ,όσο και τα παρακάτω θέματα ,γιατί αποτελούν τη βάση υπολογισμού των ποιο σημαντικών ολοκληρωμάτων.

εφαρμογή 1Β.1

Να βρείτε τις παράγουσες F των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(x+1)e^x$ **γ.** $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$

β. $f(x)=x(2ημx+xσυνx)$ **δ.** $f(x)=-\frac{1+e^x}{e^{2x}}$

λύση

α. Μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρησης και έχουμε :

$f(x)=(x+1)e^x=xe^x+e^x=x\left(e^x\right)'+x'e^x=\left(xe^x\right)'$,

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=xe^x+c$,όπου $c\in R$.

β. Όμοια έχουμε

$f(x)=x(2ημx+xσυνx)=2xημx+x^2συνx=$

$\left(x^2\right)'ημx+x^2(ημx)'=\left(x^2ημx\right)'$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=x^2ημx+c$,όπου $c\in R$.

γ. Όμοια έχουμε

$$f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\frac{\ln x}{x}+c$,όπου $c\in R$.

δ. Όμοια έχουμε

$$f(x)=-\frac{1+e^x}{\left(x+e^x\right)^2}=-\frac{\left(x+e^x\right)'}{\left(x+e^x\right)^2}=\left(\frac{1}{x+e^x}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=x^2ημx+c$,όπου $c\in R$.

εφαρμογή 1Β.2

Να βρείτε τις παράγουσες F των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^4$ **γ.** $f(x)=ημx\cdot συν^5x$

β. $f(x)=\left(συνx+e^x\right)\left(ημx+e^x\right)^7$ **δ.** $f(x)=\left(e^{x+1}-e^{-x-1}\right)\left(e^{x+1}+e^{-x-1}\right)^4$

λύση

Σε όλες τις περιπτώσεις μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρησης

α. έχουμε

$$f(x)=(2x+1)(x^2+x+1)^4=(x^2+x+1)'(x^2+x+1)^4=\left(\frac{(x^2+x+1)^5}{5}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\dfrac{(x^2+x+1)^5}{5}+c$, όπου $c\in R$.

β. έχουμε

$$f(x)=(\sigma\upsilon\nu x+e^x)(\eta\mu x+e^x)^7=(\eta\mu x+e^x)'(\eta\mu x+e^x)^7=\left(\frac{(\eta\mu x+e^x)^8}{8}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\dfrac{(\eta\mu x+e^x)^8}{8}+c$, όπου $c\in R$.

γ. έχουμε

$$f(x)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^5x=(-\sigma\upsilon\nu x)'\sigma\upsilon\nu^5x=\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu^6x}{6}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^6x}{6}+c$, όπου $c\in R$.

δ. έχουμε

$$f(x)=(e^{x+1}-e^{-x-1})(e^{x+1}+e^{-x-1})^4=(e^{x+1}+e^{-x-1})'(e^{x+1}+e^{-x-1})^4=\left(\frac{(e^{x+1}+e^{-x-1})^5}{5}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\dfrac{(e^{x+1}+e^{-x-1})^5}{5}+c$, όπου $c\in R$.

2. εύρεση συνάρτησης

↳ Είδαμε στις παραγώγους-συνέπειες ΘΜΤ, εύρεση τύπου συνάρτησης, από δοσμένες σχέσεις. Έτσι από σχέσεις ισότητας, της μορφής

$\Pi(f,f')=0$, $\Pi(f,f'')=0$, $\Pi(f,f',f'')=0$ θα αναζητούμε την εύρεση του τύπου της f.

Συνήθως μετασχηματίζουμε κατάλληλα την δοσμένη σχέση και καταλήγουμε σε μια από τις περιπτώσεις :

$\boxed{f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=c}$ $\boxed{f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=c}$ $\boxed{f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x}$

↳ **συνήθη τεχνάσματα**

$xf'(x)=\nu f(x)$	$xf'(x)=\nu f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-\nu f(x)=0\overset{\cdot x^{\nu-1}}{\Leftrightarrow}x^\nu f'(x)-\nu x^{\nu-1}f(x)=0$ $\overset{:x^{2\nu}}{\Leftrightarrow}\dfrac{x^\nu f'(x)-\nu x^{\nu-1}f(x)}{x^{2\nu}}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x^\nu}\right)'=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x^\nu}=c....$

$f'(x)+\lambda f(x)=0$	$f'(x)+\lambda f(x)=0 \overset{\cdot e^{\lambda x}}{\Leftrightarrow} e^{\lambda x}f'(x)+\lambda e^{\lambda x}f(x)=0 \Leftrightarrow \left[e^{\lambda x}f(x)\right]'=0 \Leftrightarrow$ $e^{\lambda x}f(x)=c...$
$f(x)+f''(x)=0$	$f(x)+f''(x)=0 \overset{\cdot 2f'(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x)f(x)+2f'(x)f''(x)=0 \Leftrightarrow$ $\left[f^2(x)+f'^2(x)\right]'=0$
$f'(x)+g'(x)f(x)=\kappa$	$f'(x)+g'(x)f(x)=\kappa \overset{\cdot e^{g(x)}}{\Leftrightarrow} e^{g(x)}f'(x)+e^{g(x)}g'(x)f(x)=\kappa e^{g(x)} \Leftrightarrow$ $\left(e^{g(x)}f(x)\right)'=\kappa e^{g(x)} \Leftrightarrow \left(e^{\pm g(x)}f(x)\right)'=\kappa e^{\pm g(x)}$

εφαρμογή 2.1

Να βρείτε τη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0\ ,\ +\infty)$ για την οποία ισχύει

$f\,'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και $f(4)=2$

λύση

Το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων της $f\,'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ είναι

$f(x)=2\sqrt{x}+c\ ,\ \ x\in(0,\ +\infty)$ και οποιοδήποτε $c\in\mathbb{R}$ **(1)**

Για $x=4$, η (1) $\Rightarrow$ $f(4)=2\sqrt{4}+c\Rightarrow 2=2.\,2+c\Rightarrow c=-2$

(1) $\Rightarrow$ $f(x)=2\sqrt{x}-2\ ,\ \ x\in(0,\ +\infty)$

εφαρμογή 2.2

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$,με $f(x)>0$ και

$xf'(x)=f(x)\ln f(x)$, για κάθε $x>0$.

Αν $f(1)=e^3$,να βρείτε τον τύπο της f.

λύση

Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$xf'(x)=f(x)\ln f(x) \overset{:f(x)}{\Rightarrow} x\frac{f'(x)}{f(x)}-\ln f(x)=0\Rightarrow x\left(\ln f(x)\right)'-x'\ln f(x)=0 \overset{:x^2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{x\left(\ln f(x)\right)'-x'\ln f(x)}{x^2}=0 \Rightarrow \left(\frac{\ln f(x)}{x}\right)'=0\Rightarrow \frac{\ln f(x)}{x}=c\Rightarrow \ln f(x)=cx \quad (1)$$

Για $x=1$,η (1) γράφεται $\ln f(1)=c\Rightarrow \ln e^3=c\Rightarrow c=3$.

Κατά συνέπεια από $(1)\Rightarrow \ln f(x)=3x\Rightarrow f(x)=e^{3x}$

εφαρμογή 2.3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,με

$$x\left(f'(x)-f(x)\right)=f(x)\text{ , για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=e^2.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

λύση

● Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$x\left(f'(x)-f(x)\right)=f(x)\Rightarrow xf'(x)-xf(x)=f(x)\Rightarrow xf'(x)-x'f(x)=xf(x)\overset{:x^2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=ce^x\Rightarrow f(x)=cxe^x\quad(1)$$

Για $x=1$,η (1) γράφεται $f(1)=ce\Rightarrow e^2=ce\Rightarrow c=e$,οπότε από σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x)=exe^x\Rightarrow f(x)=xe^{x+1}\quad(2)$

● Για $x=0$ έχουμε (f συνεχής) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(xe^x\right)=0\quad(3)$

Κατά συνέπεια από $(2),(3)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}xe^{x+1} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

εφαρμογή 2.4

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $1+xf'(x)=xe^{-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f(x).

λύση

● Η δοσμενη σχέση γράφεται :

$$1+xf'(x)=xe^{-f(x)}\Leftrightarrow 1+xf'(x)=\frac{x}{e^{f(x)}}\overset{\cdot e^{f(x)}}{\Leftrightarrow}e^{f(x)}+xe^{f(x)}f'(x)=x\Leftrightarrow 1\cdot e^{f(x)}+x\left(e^{f(x)}\right)'=x$$

$$\Leftrightarrow x'\cdot e^{f(x)}+x\left(e^{f(x)}\right)'=x\Leftrightarrow\left(xe^{f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow xe^{f(x)}=\frac{x^2}{2}+c\quad(1)$$

● Για $x=1$,η σχέση (1) γράφεται

$$1e^{f(1)}=\frac{1^2}{2}+c\Rightarrow e^1=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=e-\frac{1}{2}\text{ ,οπότε}$$

$$(1)\Leftrightarrow xe^{f(x)}=\frac{x^2}{2}+e-\frac{1}{2}\overset{:x}{\Leftrightarrow}e^{f(x)}=\frac{x}{2}+\frac{e}{x}-\frac{1}{2x}\Leftrightarrow$$

$$\ln e^{f(x)}=\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{e}{x}-\frac{1}{2x}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{e}{x}-\frac{1}{2x}\right)$$

3. ορισμένο ολοκλήρωμα

Α. Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος .

Για τις **συνεχείς** συναρτήσεις f, f', g ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

- $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$ οπότε και $c = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{c}{\beta-\alpha}dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha+1} c\,dx = c(\alpha+1-\alpha) = c$ οπότε και $c = \int_{\alpha}^{\alpha+1} c\,dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$ οπότε και $c = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{c}{\beta-\alpha}dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} cf(x)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ **και** $\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ με f συνεχή στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$

Β. Ορισμένο ολοκλήρωμα και παράγουσα

χρησιμοποιούμε τις παράγουσες του 1Α , 1Β

- Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$,τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta)-F(\alpha)$$

- $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta)-f(\alpha)$

Γ. Μεταβλητό άκρο ολοκληρώματος

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ με f' συνεχή στο Δ και $\alpha, x \in \Delta$,τότε

$$\int_{\alpha}^{x} f'(t)dt = \left[f(t)\right]_{\alpha}^{x} = f(x)-f(\alpha) \quad , \text{ οπότε } \quad f(x) = f(\alpha)+\int_{\alpha}^{x} f'(t)dt$$

Δ. Μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα

Ισχύουν οι τύποι :

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t)dx = g(t)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ γιατί μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το x ,οπότε $g(t)$ σταθερά .

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t)dt = f(x)\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$ γιατί μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t ,οπότε $f(x)$ σταθερά .

• $\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t)dt\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\left(\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt\right)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cf(x)dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left(\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt\right)\cdot\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)$

Ε. Εύρεση τύπου συνάρτησης-θεωρητικά θέματα **SOS !**

• Γνωρίζουμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι σταθερός πραγματικός αριθμός

Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = c \ (c \in R)$, οπότε και $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)' = c' = 0$

• Έτσι αν μας δίνεται μια ισότητα που περιέχει f ,f' , $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και **ζητείται ο τύπος** της f :

↳ θέτουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = c \ (1)$ και αντικαθιστούμε στην δοσμένη σχέση ,όπου $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το c

↳ από την δοσμένη σχέση εκφράζουμε την f συναρτήσεις του c και

↳ την αντικαθιστούμε στην σχέση (1) .Στην συνέχεια βρίσκουμε το c ,οπότε και την f .

εφαρμογή 3Α.1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,5]$ και ισχύει ότι $\int_0^5 f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx$, να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(x)dx = 0$

λύση

Είναι

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx \overset{\upsilon\pi o\theta}{\Rightarrow} \int_0^5 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^3 f(x)dx = 0$$

εφαρμογή 3Α.2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει ότι $\int_1^4\left(\int_0^3 f(t)dt\right)dx = 6$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(x)dx$

λύση

Έστω $\int_0^3 f(x)dx = c$

Από την δοσμένη σχέση έχουμε $\int_1^4 cdx = 6 \Rightarrow c(4-1) = 6 \Rightarrow c = 2$,οπότε $c = \int_0^3 f(x)dx = 2$

εφαρμογή 3Α.3

Να δείξετε ότι $\int_2^3 \ln(x^2-1)dx+\int_3^2 \ln(x+1)dx=\int_2^3 \ln(x-1)dx$

λύση

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι $\int_2^3 \ln(x^2-1)dx+\int_3^2 \ln(x+1)dx-\int_2^3 \ln(x-1)dx=0$

Πράγματι $\int_2^3 \ln(x^2-1)dx+\int_3^2 \ln(x+1)dx-\int_2^3 \ln(x-1)dx=$

$=\int_2^3 \ln(x^2-1)dx-\int_2^3 \ln(x+1)dx-\int_2^3 \ln(x-1)dx=$

$=\int_2^3 \ln(x^2-1)dx-\int_2^3 \ln(x+1)(x-1)dx=\int_2^3 \ln\frac{x^2-1}{(x+1)(x-1)}dx=\int_2^3 \ln 1dx=0(3-2)=0$

εφαρμογή 3Β.4

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Α. $\int_1^2 2x^2dx$, **Β.** $\int_1^2 \eta\mu x dx$, **Γ.** $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

λύση

Α. $\int_1^2 2x^2dx=\left[x^3\right]_1^3=2^3-1^3=8-1=7$

Β. $\int_0^\pi \eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=2$

Γ. $\int_2^e \frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^e=\ln e-\ln 2$.

εφαρμογή 3Β.5

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Α. $\int_1^2 x^3\sqrt{x}dx$, **Β.** $\int_2^4 \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^3}}dx$, **Γ.** $\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{x^5}\right)dx$

λύση

Α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3\sqrt{x}=x^3x^{1/2}=x^{7/2}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[1,2]$,οπότε

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x}dx=\int_1^2 x^{7/2}dx=\left[\frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}\right]_1^2=\left[\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{9}\left[x^{\frac{9}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{9}\left[\sqrt{x^9}\right]_1^2=\frac{2}{9}\left[x^4\sqrt{x}\right]_1^2=$$

$$=\frac{2}{9}\left(2^4\sqrt{2}-1\sqrt{1}\right)=\frac{2}{9}\left(16\sqrt{2}-1\right)$$

B. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4}{\sqrt[5]{x^3}}=x^4x^{-5/3}=x^{7/3}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[2,4]$, οπότε

$$\int_2^4\frac{x^4}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int_2^4 x^{7/3}dx=\left[\frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\right]_2^4=\left[\frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}\right]_2^4=\frac{3}{10}\left[x^{\frac{10}{3}}\right]_2^4=\frac{3}{10}\left[\sqrt[3]{x^{10}}\right]_2^4=\frac{3}{10}\left[x^3\sqrt[3]{x}\right]_2^4=$$

$$=\frac{3}{10}\left(64\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2}\right)$$

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^5}$ είναι συνεχής στο $R-\{0\}$ άρα και στο $[1,2]$,οπότε

$$\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{x^5}\right)dx=\int_1^2\left(x^3+x^{-5}\right)dx=\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}+\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4x^4}\right]_1^2=\frac{15}{4}$$

εφαρμογή 3B.6

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{συν}x-2\,\text{ημ}x)\,dx$ **, B.** $\displaystyle\int_0^2(3x^2-2x+1)\,dx$ **, Γ.** $\displaystyle\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

λύση

A. Η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x-2\,\text{ημ}x$ είναι συνεχής στο R άρα και στο $[1,2]$,οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{συν}x-2\,\text{ημ}x)\,dx=[\text{ημ}x+2\,\text{συν}x]_0^{\frac{\pi}{2}}=(\text{ημ}\frac{\pi}{2}+2\text{συν}\frac{\pi}{2})-(\text{ημ}0+2\text{συν}0)=$$

$1+0-0-2=-1$

B. Η συνάρτηση $f(x)=3x^2-2x+1$ είναι συνεχής στο R άρα και στο $[1,2]$,οπότε

$$\int_0^2(3x^2-2x+1)\,dx=[x^3-x^2+x]_0^2=(2^3-2^2+2)-(0-0+0)=8-4+2=6$$

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ είναι συνεχής στο $R-\{0\}$ άρα και στο

$[1,2]$,οπότε

$$\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right]_1^2 =$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}+2.2-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1^3}{3}+2.1-\frac{1}{1}\right] = \frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1 = \frac{29}{6}$$

εφαρμογή 3B.7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Α. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3)(x-1)^2 dx$, **Β.** $\displaystyle\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\ln(x-1)}dx$, **Γ.** $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx$

λύση

Α. Η συνάρτηση $f(x)=(x^2+3)(x-1)^2=x^4-2x^3+4x^2-6x+3$ είναι συνεχής στο R άρα και στο $[0,1]$,οπότε

$$\int_0^1 (x^2+3)(x-1)^2 dx=\int_0^1 (x^4-2x^3+4x^2-6x+3)dx=$$

$$=\int_0^1 x^4dx-2\int_0^1 x^3dx+4\int_0^1 x^2dx-6\int_0^1 xdx+3\int_0^1 1dx=$$

$$=\left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_0^1-2\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^1+4\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_0^1-6\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_0^1+3[x]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^1+\frac{4}{3}\left[x^3\right]_0^1-3\left[x^2\right]_0^1+3[x]_0^1=\frac{31}{30}$$

Β. Η συνάρτηση

$f(x)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\ln(x-1)}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)(x-1)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}=\frac{1}{x}-x^{-2}+x^{-4}+x^{-5}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ άρα και στο $[2,e]$,οπότε

$$\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\ln(x-1)}dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}-x^{-2}+x^{-4}+x^{-5}\right)dx=$$

$$=\left[\ln|x|-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right]_e^{e^2}=\left[\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}\right]_e^{e^2}=$$

$$=\left[\ln e^2+\frac{1}{e}-\frac{1}{3e^6}-\frac{1}{4e^8}\right]-\left[\ln e+\frac{1}{e}-\frac{1}{3e^3}-\frac{1}{4e^4}\right]=\frac{1}{3e^6}\left(3e^6+e^3-1\right)$$

Γ. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx = \int_1^e\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)dx = \int_1^e\left(\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\ln x + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^e = \left[\ln x - 2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^e =$$

$$\left(\ln e - 2e^{-\frac{1}{2}}\right) - (\ln 1 - 2) = 1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} + 2 = = 3 - \frac{2}{\sqrt{e}}$$

εφαρμογή 3Β.8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Α. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 - 4x + 4} dx$, **Β.** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)}{x^2 + 2x + 1} dx$, **Γ.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\left(x^2 + 2x + 7\right)^6 dx$

λύση

Α. Έχουμε $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int_{-1}^{0} (x-2)^{-2} dx = \int_{-1}^{0} \left[\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}\right]' dx = -\int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{x-2}\right)' dx =$

$$= -\left[\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^{0} = -\left\{\frac{1}{-2} - \frac{1}{-3}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Β. Παρατηρούμε ότι : $x - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} - x = \frac{3\pi}{2}$, οπότε

$$\eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{3} - x\right) = \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 \frac{\eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{3} - x\right)}{x^2 + 2x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 (x+1)^{-2} dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]' dx =$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right)' dx = -\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\left\{\frac{1}{2} - 1\right\} = \frac{1}{2}$$

Γ. Έχουμε

$$\int_0^1 (x+1)\left(x^2 + 2x + 7\right)^6 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+2)\left(x^2 + 2x + 7\right)^6 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 + 2x + 7\right)' \left(x^2 + 2x + 7\right)^6 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{\left(x^2 + 2x + 7\right)^7}{7}\right]' dx =$$

$$= \frac{1}{14}\left[\left(x^2 + 2x + 7\right)^7\right]_0^1 = \frac{1}{14}\left(10^7 - 7^7\right)$$

εφαρμογή 3Γ.9

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^x\left(2x-e^x\right)\,dx$ και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\left(2x-e^x\right)\,dx$

λύση

- Έχουμε $\int_0^x\left(2x-e^x\right)\,dx=\int_0^x\left(x^2-e^x\right)'\,dx=\left[x^2-e^x\right]_0^x=\left(x^2-e^x\right)-\left(0^2-e^0\right)=x^2-e^x+1 \quad (1)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\left(2x-e^x\right)\,dx\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-e^x+1\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x^2}{e^x}-1+\frac{1}{e^x}\right)=(+\infty)(0-1+0)=-\infty$,γιατί :

$\hookrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}e^x$,$\hookrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=0$ και$\hookrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

εφαρμογή 3Δ.10

Α.Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^\beta f(x)f(t)dt\right)\,dx=\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2$

Β.Αν $\int_0^1 f(x)dx=1$,να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(\int_0^1 t^2 f(x)dt\right)\,dx$

λύση

Α. Έχουμε

$\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^\beta f(x)f(t)dt\right)$ $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^\beta f(x)f(t)dt\right)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\underbrace{\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt\right)}_{c}\,dx=\int_\alpha^\beta cf(x)\,dx=c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

$=\left(\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)=\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)=\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2 dx$

Β. Έχουμε

$\int_0^1\left(\int_0^1 t^2 f(x)dt\right)\,dx=\int_0^1 f(x)\underbrace{\left(\int_0^1 t^2dt\right)}_{c}\,dx=c\int_0^1 f(x)dx=\left(\left(\int_0^1 t^2dt\right)\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \quad (1)$

Όμως $\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$ και έτσι από την (1) παίρνουμε $\int_0^1\left(\int_0^1 t^2 f(x)dt\right)\,dx=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$

εφαρμογή 3Ε.11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ για την οποία ισχύει :

$e^{\int_0^1 f(x)dx}=\int_0^1\left(f(x)+4x^3\right)dx$.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$

λύση

• Υποθέτουμε ότι $\int_0^1 f(x)dx = c, c \in R \quad (1)$

• Η δοσμένη σχέση γράφεται $e^{\int_0^1 f(x)dx} = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (x^4)'dx \Rightarrow e^c = c + [x^4]_0^1 \Rightarrow e^c = c+1 \quad (2)$

• Γνωρίζουμε ακόμη ότι $e^x \geq x+1$ (…θέλει απόδειξη) με το $''=''$ να ισχύει μόνο για $x=0$.

• Έτσι από την σχέση (2) προκύπτει ότι $c=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$

εφαρμογή 3Ε.12

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει :
$f(x) = 3x^2 + \int_0^2 f(x)dx$.Να υπολογίσετε τον τύπο της f .

λύση

• Θέτουμε $\int_0^2 f(x)dx = c \quad (1)$,οπότε από την δοσμένη σχέση προκύπτει $f(x) = 3x^2 + c \quad (2)$

• Η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται :

$$\int_0^2 (3x^2+c)dx = c \Rightarrow \int_0^2 3x^2dx + \int_0^2 cdx = c \Rightarrow [x^3]_0^2 + c(2-0) = c \Rightarrow 8+2c = c \Rightarrow c = -8 .$$

Κατά συνέπεια (λόγω (1)) έχουμε $\int_0^2 f(x)dx = -8$.

4Α. μεθοδοι ολοκληρωσης-1 → παραγοντική ολοκλήρωση

● Η παραγοντική ολοκλήρωση χρησιμοποιείται συνήθως σε ολοκλήρωση **γινομένων ,πηλίκων** που έχουν (ή που μπορούν να γραφτούν) στην μορφή $\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx$.

●Για να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο **αντικαθιστούμε την μια από τις δύο συναρτήσεις του γινομένου-πηλίκου με την παράγωγο της αρχικής της (παράγουσας), υπό την προυπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.**

● Η συνάρτηση η οποία επιλέγουμε για να **αντικαταστήσουμε με την παράγωγο της αρχική της** για να εφαρμόσουμε τον τύπο, με **σειρά επιλογής** είναι:

☞ $e^{\alpha x+\beta} \to \left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}\right)'$

☞ $\eta\mu(\alpha x+\beta)\rightarrow\left(-\frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\right)'$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\rightarrow\left(\frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+\beta)\right)'$

☞ $g(x)$ **πολυώνυμο** $\rightarrow P(x)'$ (όπου $P(x)'=g(x)$)

● συμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τις **βασικές μορφές παραγοντικής** ολοκλήρωσης

☞ $\int_\alpha^\beta g(x)\cdot e^x dx=\int_\alpha^\beta g(x)\cdot\left(e^x\right)' dx=\left[g(x)e^x\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g'(x)\cdot e^x dx=...$

☞ $\int_\alpha^\beta g(x)\cdot \eta\mu x dx=\int_\alpha^\beta g(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)' dx=[\text{-}g(x)\sigma\upsilon\nu x]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=...$

☞ $\int_\alpha^\beta g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx=\int_\alpha^\beta g(x)\cdot(\eta\mu x)' dx=[g(x)\eta\mu x]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta g'(x)\cdot\eta\mu x dx=...$

☞ $\int_\alpha^\beta e^x\eta\mu x dx=\int_\alpha^\beta (\eta\mu x)\cdot\left(e^x\right)' dx=\left[(\eta\mu x)e^x\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (\eta\mu x)'e^x dx=...$

☞ $\int_\alpha^\beta e^x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_\alpha^\beta (\sigma\upsilon\nu x)\cdot\left(e^x\right)' dx=\left[(\sigma\upsilon\nu x)e^x\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (\sigma\upsilon\nu x)'e^x dx=...$

προσοχή εδώ γιατί στην πορεία της παραγοντικής εμφανίζεται το **αρχικό** ολοκλήρωμα το οποίο και μεταφέρουμε στο 1^0 μέλος

☞ $\int_\alpha^\beta \ln x dx=\int_\alpha^\beta 1\cdot\ln x dx=\int_\alpha^\beta x'\cdot\ln x dx=[x\cdot\ln x]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta x\cdot(\ln x)'dx=[x\cdot\ln x]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta x\cdot\frac{1}{x}dx=...$

εφαρμογή 4Α.1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^\pi x\eta\mu x dx}$

λύση

Έχουμε

$$I=\int_0^\pi x\eta\mu x dx=\int_0^\pi x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx=[-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi-\int_0^\pi x'(-\sigma\upsilon\nu x)dx=[-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi+\int_0^\pi(\sigma\upsilon\nu x)dx=$$

$$=[-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi+[\eta\mu x]_0^\pi=\{(-\pi\sigma\upsilon\nu\pi)-(0\sigma\upsilon\nu 0)\}+\{(\eta\mu\pi)-(\eta\mu 0)\}=\pi$$

εφαρμογή 4Α.2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^\pi (2x-1)e^{x+3}dx}$

λύση

Έχουμε

$$I=\int_0^1(2x-1)e^{x+3}dx=\int_0^1(2x-1)\left(e^{x+3}\right)'dx=\left[(2x-1)\left(e^{x+3}\right)\right]_0^1-\int_0^1(2x-1)'e^{x+3}dx=$$

$$=\left[(2x-1)\left(e^{x+3}\right)\right]_0^1-2\int_0^1 e^{x+3}dx=\left[(2x-1)\left(e^{x+3}\right)\right]_0^1-2\left[e^{x+3}\right]_0^1=$$

$$\left\{(2\cdot 1-1)\left(e^{1+3}\right)-(2\cdot 0-1)\left(e^{0+3}\right)\right\}-2\left\{e^{1+3}-e^{0+3}\right\}=-e^4+3e^3$$

εφαρμογή 4A.3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx}$

λύση

Έχουμε

$$I=\int_0^{\pi} e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(\eta\mu x)'dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=$$

στο σημείο αυτό κάνουμε δεύτερη παραγοντική

$$=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx\right)=$$

$$=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\underbrace{\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx}_{\text{..........I.........}}\right)$$, οπότε

εμφάνιση του αρχικού ολοκληρώματος

$$I=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-I\Rightarrow 2I=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}\right)$$

εφαρμογή 4A.4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_1^e x^2\ln x dx}$

λύση

Έχουμε

$$I=\int_1^e x^2\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot(\ln x)'dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\left[x^2\right]_1^e=.....$$

εφαρμογή 4A.5

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx}$

λύση

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{e^2}\ln x\cdot(2\sqrt{x})'dx=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2}=2\sqrt{e^2}\ln e^2-2\sqrt{1}\ln 1-4(\sqrt{e^2}-\sqrt{1})$$

$$=2e\cdot 2\ln e-0-4e+4=4e-4e+4=4$$

● Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx$ κάνουμε τα εξής:

↳ Θέτουμε $u = g(x)$,οπότε $du = g'(x)dx$

↳ Αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης: Για $x = \alpha$ είναι $u_1 = g(\alpha)$ και για $x = \beta$ είναι $u_2 = g(\beta)$

↳ Έτσι το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται :

$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ και υπολόγίζεται ανάλογα με την περίπτωση .

● Συνήθως θέτουμε $u = g(x)$ και $g(x)$ είναι κατ΄εκτίμηση παράσταση που ΄΄προκαλεί΄΄ συνθετότητα.Αν προκύψει ολοκλήρωμα περίπλοκο σε σχέση με το αρχικό ,δοκιμάζουμε άλλη αντικατάσταση.

● **Βασικές μορφές αντικατάστασης** είναι οι παρακάτω :

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)dx \rightarrow$ θέτουμε $u = g(x)$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f(\kappa x + \lambda)dx \rightarrow$ θέτουμε $u = \kappa x + \lambda$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x\ ,\ \ln x)dx \rightarrow$ θέτουμε $u = \ln x$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x), (\kappa x + \lambda)^{\rho} \right)dx$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο και ρ ρητός , $\kappa, \lambda \in R \rightarrow$ θέτουμε $u = \kappa x + \lambda$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(e^{\kappa x}, e^{\lambda x}\right)dx$, $\kappa, \lambda \in Q \rightarrow$ θέτουμε $u = e^{x}$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt[\nu]{(\kappa x + \lambda)^{\mu}}\right)dx$, $\mu, \nu \in N^{*} \rightarrow$ θέτουμε $u = \kappa x + \lambda$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\sqrt[\mu]{\kappa x + \lambda}, \sqrt[\rho]{\kappa x + \lambda}\right)dx$, $\mu, \rho \in N^{*} \rightarrow$βρίσκουμε το $\nu = ΕΚΠ(\mu, \rho)$ θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{\kappa x + \lambda}$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} f\left((\kappa x + \lambda)^{\mu}, (\kappa x + \lambda)^{\rho}\right)dx$, $\mu, \rho \in N^{*}$ με $\mu < \rho \rightarrow$ θέτουμε $u = (\kappa x + \lambda)^{\mu}$

εφαρμογή 4Β.1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **ii)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)\eta\mu x - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)]\,dx$

λύση

i) $I = \int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

• Θέτουμε $x^2 - 4 = u \Rightarrow 2x\,dx = du \Rightarrow x dx = \frac{1}{2}du$

• Για $x = 4 \Rightarrow u = 4^2 - 4 = 12$

• Για $x = 6 \Rightarrow u = 6^2 - 4 = 32$

Οπότε το I γράφεται $I = \int_{12}^{32} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \left[\sqrt{u}\right]_{12}^{32} = \sqrt{32} - \sqrt{12} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

ii) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)\eta\mu x - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)]\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)(\eta\mu x - 1)]\,dx$

• Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x + x = u \Rightarrow (-\eta\mu x + 1)dx = du \Rightarrow (\eta\mu x - 1)dx = -du$

• Για $x = 0 \Rightarrow u = \sigma\upsilon\nu 0 + 0 = 1$

• Για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Οπότε $I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu u\,(-du) = \int_1^{\frac{\pi}{2}} -\eta\mu u\,du = [\sigma\upsilon\nu u]_1^{\frac{\pi}{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 1 = -\sigma\upsilon\nu 1$

εφαρμογή 4Β.2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\ln(9 + x^2)\,dx$

λύση

• Θέτουμε $9 + x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

• Για $x = 0 \Rightarrow u = 9 + 0^2 = 9$

• Για $x = 1 \Rightarrow u = 9 + 1^2 = 10$

Οπότε $\int_0^1 x\ln(9 + x^2)\,dx = \int_9^{10} \frac{1}{2}\ln u\,du = \frac{1}{2}\int_9^{10} \ln u\,du = \frac{1}{2}\int_9^{10} u'\ln u\,du$

$$= \frac{1}{2}[u\ln u]_9^{10} - \frac{1}{2}\int_9^{10} u\cdot\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}[u\ln u]_9^{10} - \frac{1}{2}\int_9^{10} du = \frac{1}{2}[u\ln u]_9^{10} - \frac{1}{2}[u]_9^{10}$$

$$= \frac{1}{2}(10\cdot\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}(10 - 9) = 5\ln 10 - \frac{9}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}$$

εφαρμογή 4Β.3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^2 \frac{1}{(2x+5)^6}dt$

λύση

● θέτουμε $2x+5=u$,οπότε $d(2x+5)=du \Rightarrow (2x+5)'dx=du \Rightarrow 2dx=du \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$

● νέα άκρα

$u_1=2x+5\big|_{x=1}=2+5=7$ και $u_2=2x+5\big|_{x=2}=4+5=9$

● έχουμε $I=\int_1^2 \frac{1}{(2x+5)^6}dt=\int_7^9 u^{-6}dt=\left[\frac{u^{-6+1}}{-6+1}\right]_7^9=-\frac{1}{5}\left[u^{-5}\right]_7^9=-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u^5}\right]_7^9=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9^5}-\frac{1}{7^5}\right)$

εφαρμογή 4Β.4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+5}}dx$

λύση

Θέτουμε $x^2+x+5=u \Rightarrow (2x+1)dx = du$

Για $x=0 \Rightarrow u=0+0+1=1$

Για $x=1 \Rightarrow u=1+1+5=7$

Οπότε $I=\int_1^7 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+5}}dx=\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{u}}du=2\int_1^7 \frac{1}{2\sqrt{u}}du=\left[\sqrt{u}\right]_1^7=$........

εφαρμογή 4Β.5

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^2 \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$

λύση

● θέτουμε $\ln x=u$,οπότε $d(\ln x)=du \Rightarrow (\ln x)'dx=du \Rightarrow \frac{1}{x}dx=du$

● νέα άκρα

$u_1=\ln x\big|_{x=e}=1$ και $u_2=\ln x\big|_{x=2}=\ln 2$

● έχουμε $I=\int_e^2 \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int_1^{\ln 2}\frac{\ln u}{u}du\overset{(\bullet)}{=}\int_1^{\ln 2}(\ln u)'\ln u\,du=\left[\frac{1}{2}\ln^2 u\right]_1^{\ln 2}=\frac{1}{2}\ln^2(\ln 2)$

εφαρμογή 4Β.6

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^1 x^2(x+2)^{2/3}\,dx}$

λύση

● θέτουμε $x+2=u$,οπότε $d(x+2)=du \Rightarrow (x+2)'\,dx=du \Rightarrow dx=du$

● νέα άκρα

$u_1=x+2|_{x=0}=2$ και $u_2=x+2|_{x=1}=3$

έχουμε $I=\int_0^1 x^2(x+2)^{2/3}\,dx=\int_2^3 (u-2)^2u^{2/3}du=\int_2^3 (u^2-2u+4)u^{2/3}du=\int_2^3 (u^{8/3}-2u^{5/3}+4u^{2/3})du$

$=\int_0^1 u^{\frac{8}{3}}du-2\int_0^1 u^{\frac{5}{3}}du+4\int_0^1 u^{\frac{2}{3}}du=\ldots$

και υπολογίζουμε τα απλά ολοκληρώματα που προκύπτουν.

εφαρμογή 4Β.7

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^1 (x+1)^2(x+2)^5\,dx}$

λύση

● θέτουμε $x+2=u \Rightarrow x=u-2$

● διαφορίζουμε $d(x+2)=du \Rightarrow (x+2)'\,dx=du \Rightarrow dx=du$

● νέα άκρα

$u_1=x+2|_{x=0}=2$ και $u_2=x+2|_{x=1}=3$

έχουμε $I=\int_0^1 (x+1)^2(x+2)^5\,dx=\int_2^3 (u-2)^2u^5du=\int_2^3 (u^2-4u+4)u^5du=\int_2^3 (u^7-4u^6+4u^5)du=$

$=\int_2^3 u^7du-4\int_2^3 u^6du+4\int_2^3 u^5du=\ldots$

και υπολογίζουμε τα απλά ολοκληρώματα που προκύπτουν.

● Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ κάνουμε τα εξής:

↳ ελέγχουμε αν το κλάσμα απλοποιείται και προκύπτουν απλά ολοκληρώματα

↳ ελέγχουμε αν $A(x)=B'(x)$,οπότε $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Q'(x)}{Q(x)}dx=\left[\ln|Q(x)|\right]_{\alpha}^{\beta}$

● Αν **δεν ισχύουν τα παραπάνω** και **Βαθμός P(x) < Βαθμός Q(x),** έχουμε δε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\kappa}^{\lambda}\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$ με $\alpha\neq 0$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ και

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$,τότε αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων και έχουμε : $\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\frac{A}{x-\rho_1}+\frac{B}{x-\rho_2}$

Κάνουμε ομώνυμα στο δεύτερο μέλος και απαιτούμε οι αριθμητές των δύο κλασμάτων να είναι ίσα πολυώνυμα. Έτσι δημιουργείται σύστημα, απ΄όπου βρίσκουμε τα A,B.

● Αν **Βαθμός P(x) ≥ Βαθμός Q(x)** ,τότε :

↳ Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων $P(x):Q(x)$,οπότε $P(x)=Q(x)\Pi(x)+Y(x)$

↳ Η ρητή συνάρτηση στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)\Pi(x)+Y(x)}{Q(x)}=\Pi(x)+\frac{Y(x)}{Q(x)}$$

και το ολοκλήρωμα ανάγεται στις παραπάνω περιπτώσεις

εφαρμογή 4Γ.1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{-1}^{0}\frac{x-4}{x^2-5x+4}dx}$

λύση

Έχουμε

$$\int_{-1}^{0}\frac{x-4}{x^2-5x+4}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x-4}{(x-1)(x-4)}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}dx=\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}=-\ln 2$$

εφαρμογή 4Γ.2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{-1}^{0}\frac{2x-5}{x^2-5x+4}dx}$

λύση

Έχουμε

$$\int_{-1}^{0}\frac{2x-5}{x^2-5x+4}dx=\int_{-1}^{0}\frac{\left(x^2-5x+4\right)'}{x^2-5x+4}dx=\int_{-1}^{0}\left[\ln\left|x^2-5x+4\right|\right]'dx=$$

$$=\left[\ln\left(x^2-5x+4\right)\right]_{-1}^{0}=\ln 4-\ln 10=\ln\frac{2}{5}$$

εφαρμογή 4Γ.3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{2}^{3}\frac{x}{x^4-2x^2+1}dx}$

λύση

Έχουμε

$$I=\int_{2}^{3}\frac{x}{x^4-2x^2+1}dx=\int_{2}^{3}\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{3}\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{-2}dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{3}\left[\frac{\left(x^2-1\right)^{-2+1}}{-2+1}\right]'dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{2}^{3}\left[\frac{1}{x^2-1}\right]'dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1}\right]_{2}^{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\right)$$

εφαρμογή 4Γ.4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2-4x+3}dx}$

λύση

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f=R-\{1,3\}$.

Κατά συνέπεια ,ως ρητή είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,0]$.

Είναι $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}\quad(1)$

δηλαδή η συνάρτηση γράφεται σαν άθροισμα δύο κλασμάτων, οπότε θα προσδιορίσουμε τις τιμές των A,B ,για τα $x\in A_f$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται :

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}\Leftrightarrow A(x-3)+B(x-1)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(A+B)x+(-3A-B)=0x+1\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\-3A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Άρα $f(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-3}$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-1}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\Big[\ln|x-3|\Big]_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 2)+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 4)=\frac{1}{2}(-\ln 4+\ln 3+\ln 2)$$

σχόλιο

Μια άλλη αντιμετώπιση είναι η παρακάτω

$$I=\int_{-1}^{0} f(x)dx=I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x-1)(x-3)}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-3}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}dx=\frac{1}{2}\Big[\ln|x-3|\Big]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0}=\dots$$

εφαρμογή 4Γ.5

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$

λύση

Κάνουμε την Ευκλείδια διαίρεση $(x^2-x+2):(x^2-3x+2)$

$$\begin{array}{rrr|rrr} x^2 & -\ 2x & +\ 2 & x^2 & -\ 3x & +\ 2 \\ \hline -x^2 & +\ 3x & -2 & 1 & & \\ \hline & x & & & & \end{array}$$

και έχουμε

$x^2\ -\ 2x\ +\ 2=1\cdot(x^2\ -\ 3x\ +\ 2)+x$, οπότε

$$I_1=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1\cdot(x^2\ -\ 3x\ +\ 2)+x}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{x}{x^2-3x+2}\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}1dx+\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2-3x+2}dx\quad (1)$$. Όμως

- $=\displaystyle\int_{-1}^{0}1dx=[x]_{-1}^{0}=1$
- $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{(x-1)(x-2)}dx=\dots=\int_{-1}^{0}\left[-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right]=\dots=\ln\frac{8}{9}$

▶ Αν η f είναι **πολλαπλού τύπου** της μορφής $f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in[\alpha,\kappa)\\ \sigma(x) & x\in[\kappa,\beta]\end{cases}$, τότε:

● εξασφαλίζουμε τη συνέχεια της f στο $x=\kappa$ και κατ΄επέκταση στο $[\alpha,\beta]$

● στη συνέχεια ολοκληρώνουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{k}\varphi(x)dx+\int_{k}^{\beta}\sigma(x)dx$

▶ Αν η συνάρτηση f έχει στον τύπο της **απόλυτα** ,τότε :

● εξασφαλίζουμε πάλι την συνέχεια της στο $[\alpha,\beta]$

● Αν η παράσταση του απολύτου **διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $[\alpha,\beta]$,τότε το απαλοίφουμε και υπολογίζουμε κατά τα γνωστά το ολοκλήρωμα που προκύπτει.

● Αν η παράσταση του απολύτου **δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $[\alpha,\beta]$,τότε το απαλοίφουμε , **την τρέπουμε σε πολλαπλού τύπου** και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

εφαρμογή 4Δ.1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, **αν** $f(x)=\begin{cases}x\ , & -\pi\le x\le 0\\ ημx, & 0<x\le\pi\end{cases}$

λύση

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} ημx=0=f(0)$,

η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα συνεχής και στο $[-\pi,\ \pi]$

Οπότε $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0} x\,dx+\int_{0}^{\pi} ημx\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+[-συνx]_0^{\pi}$

$$=(0-\frac{\pi^2}{2})+(-συνπ+συν0)=-\frac{\pi^2}{2}+1+1=2-\frac{\pi^2}{2}$$

εφαρμογή 4Δ.2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx$

λύση

Πρόσημο του τριώνυμου :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Οπότε

$\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx=$

$\int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx+\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx+\int_2^3(x^2-3x+2)\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0+-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2+\frac{27}{3}-\frac{27}{2}+6-\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4=\frac{11}{6}$$

► Βασικοί τύποι -1

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

$\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

$\eta\mu^2\omega=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

$\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

$\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{1}{\sigma\varphi\omega}$

$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$

► Βασικοί τύποι -2

$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\\ 1-2\eta\mu^2\alpha\\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\end{cases}$ $\quad$ $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

$\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$ $\quad$ $\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

► Το ημx να είναι σε περιττή δύναμη

$$\int_\alpha^\beta \eta\mu^{2\nu+1}x\,dx \qquad \int_\alpha^\beta \eta\mu^{2\nu+1}x\,\sigma\upsilon\nu^{\kappa}x\,dx \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\eta\mu^{2\nu+1}x}{\sigma\upsilon\nu^{\kappa}x}dx$$

- Κάνουμε διάσπαση της δύναμης του ημιτόνου

  $\eta\mu^{2\nu+1}x=\left(\eta\mu^2x\right)^\nu\eta\mu x=\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^\nu\eta\mu x$
- Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=t$
- $d\sigma\upsilon\nu x=dt\Rightarrow-\eta\mu x dx=dt\Rightarrow\eta\mu x dx=-dt$
- νέα άκρα $u_1=\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $u_2=\sigma\upsilon\nu\beta$

► Το συνx να είναι σε περιττή δύναμη

$$\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x\,dx \qquad \int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x\,\eta\mu^{\kappa}x\,dx \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x}{\eta\mu^{\kappa}x}dx$$

- Κάνουμε διάσπαση της δύναμης του συνημιτόνου

  $\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x=\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^\nu\sigma\upsilon\nu x=\left(1-\eta\mu^2x\right)^\nu\eta\mu x$
- Θέτουμε $\eta\mu x=t$
- $d\sigma\upsilon\nu x=dt\Rightarrow-\eta\mu x dx=dt\Rightarrow\eta\mu x dx=-dt$
- νέα άκρα $u_1=\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $u_2=\sigma\upsilon\nu\beta$

εφαρμογή 4Ε.1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^{\pi}ημxσυν^2xdx}$

λύση

- θέτουμε $συνx=u$
- διαφορίζουμε $d(συνx)=du\Rightarrow(συνx)'dx=du\Rightarrow -ημxdx=du\Rightarrow ημxdx=-du$
- νέα άκρα

$u_1=συνx|_{x=0}=1$ και $u_2=συνx|_{x=\pi}=-1$

έχουμε $I=\int_0^{\pi}ημxσυν^2xdx=\int_1^{-1}u^2(-du)=\int_{-1}^{1}u^2du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{(-1)}{3}=\frac{2}{3}$

εφαρμογή 4Ε.2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^{\pi}ημ^3xdx}$

λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται $I=\int_0^{\pi}ημ^3xdx=\int_0^{\pi}ημxημ^2xdx=\int_0^{\pi}ημx\left(1-συν^2x\right)dx \quad (1)$

- θέτουμε $συνx=u$
- διαφορίζουμε $d(συνx)=du\Rightarrow(συνx)'dx=du\Rightarrow -ημxdx=du\Rightarrow ημxdx=-du$
- νέα άκρα

$u_1=συνx|_{x=0}=1$ και $u_2=συνx|_{x=\pi}=-1$

έχουμε $\int_0^{\pi}ημx\left(1-συν^2x\right)dx=\int_1^{-1}\left(1-u^2\right)(-du)=\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}=$

$\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

εφαρμογή 4Ε.3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^{\pi}ημ^3xσυν^2xdx}$

λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται $I=\int_0^{\pi}ημ^3xσυν^2xdx=\int_0^{\pi}ημxημ^2xσυν^2xdx=\int_0^{\pi}ημx\left(1-συν^2x\right)συν^2xdx$

- θέτουμε $συνx=u$
- διαφορίζουμε $d(συνx)=du\Rightarrow(συνx)'dx=du\Rightarrow -ημxdx=du\Rightarrow ημxdx=-du$
- νέα άκρα

$u_1=συνx|_{x=0}=1$ και $u_2=συνx|_{x=\pi}=-1$ και έχουμε

$$I=\int_0^{\pi}\eta\mu x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\sigma\upsilon\nu^2x dx=\int_1^{-1}\left(1-u^2\right)u^2du=\int_1^{-1}\left(u^2-u^4\right)du=$$

$$=\int_1^{-1}u^2du-\int_1^{-1}u^4du=-\int_{-1}^{1}u^2du+\int_{-1}^{1}u^4du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

εφαρμογή 4Ε.4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathbf{I=\int_0^{\pi/6}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx}$

λύση

Το ολοκλήρωμα γράφεται $I=\int_0^{\pi/6}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2x}dx \quad (1)$

- θέτουμε $\eta\mu x=u$
- διαφορίζουμε $d\left(\eta\mu x\right)=du\Rightarrow\left(\eta\mu x\right)'dx=du\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x dx=du$
- νέα άκρα

$u_1=\eta\mu x\big|_{x=0}=0$ και $u_1=\eta\mu x\big|_{x=\pi/6}=\frac{1}{2}$

από την (1) έχουμε

$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2x}dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{1-u^2}du=\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-u)(1+u)}du=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{(u+1)-(u-1)}{-(u-1)(u+1)}du=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right]du=-\frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2}\frac{1}{u-1}du-\int_0^{1/2}\frac{1}{u+1}du=\left[\ln|u-1|\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[\ln|u+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln 3$$

εφαρμογή 4Ε.5

Αν $\mathbf{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\eta\mu^2x\,dx}$, $\mathbf{J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,dx}$ **, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα**

$\mathbf{I+J}$ **,** $\mathbf{I-J}$ **,** $\mathbf{I}$ **,** $\mathbf{J}$

λύση

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\eta\mu^2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\,\eta\mu^2x+x\sigma\upsilon\nu^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \mathbf{(1)}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\eta\mu^2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\,\eta\mu^2x-x\,\sigma\upsilon\nu^2x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\sigma\upsilon\nu 2x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)'dx = -\left[x\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{2}\,dx$$

$$= -\left[\frac{\pi}{2}\frac{\eta\mu\pi}{2} - \frac{0}{2}\frac{\eta\mu 0}{2}\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x\,dx = -0 - \frac{1}{4}\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0\right] = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$$ **(2)** και έχουμε :

$$(1)+(2) \Rightarrow 2I = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 2I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

4Ζ. μεθοδοι ολοκληρωσης - 6 → θεωρητικά –σύνθετα θέματα

► **ολοκλήρωμα αντίστροφης**

- η μετάβαση από το ένα ολοκλήρωμα στο άλλο $\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ ⇄ $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)dx$ γίνεται ανάκογα με το

ποια συνάρτηση έχει γνωστό τύπο ή είναι απλός ο υπολογισμός του ολοκληρώματος .
- Αν περάσουμε από την f^{-1} στην f ,κάνουμε αντικατάσταση $x = f(u)$
- Αν περάσουμε από την f στην f^{-1} ,κάνουμε αντικατάσταση $x = f^{-1}(u)$

► **η αντικατάσταση** $\boxed{u = \alpha+\beta-x}$ **Ισχύει ότι** $\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx}$

απόδειξη

Πράγματι ,αν στο ολοκλήρωμα $1 = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ θέσουμε $x = \alpha+\beta-u \Rightarrow u = \alpha+\beta-x$

παίρνουμε :
- $dx = d(\alpha+\beta-u) \Rightarrow dx = -du$
- $u_1 = \alpha+\beta-\alpha = \beta$ και $u_2 = \alpha+\beta-\beta = \alpha$,οπότε

$$1 = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-u)(-du) = -\int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-u)du = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-u)du =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx \quad , \text{ άρα } \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$$

► **Αν f είναι άρτια συνάρτηση,τότε ισχύει** $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$

απόδειξη

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=I_1+I_2 \quad (1)$$

Στο ολοκλήρωμα I_1 κάνουμε αλλαγή μεταβλητής ,

θέτοντας $u=-x \Rightarrow x=-u$ οπότε και $dx=-du$

Τα νέα άκρα είναι $u_1=-x|_{x=-\alpha}=\alpha$ και $u_2=-x|_{x=0}=0$,οπότε

- $I_1=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)=-\int_{\alpha}^{0} f(u)du=\int_{0}^{\alpha} f(u)du=\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=I_2$,οπότε η

$$(1)\Leftrightarrow I=2I_2 \Leftrightarrow I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$$

► **Αν f είναι περιττή συνάρτηση,τότε ισχύει** $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$

απόδειξη

όμοια έχουμε

- $I_1=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)=\int_{\alpha}^{0} f(u)du=-\int_{0}^{\alpha} f(u)du=-I_2$,οπότε η

$$(1)\Leftrightarrow I=I_1+I_2=-I_2+I_2=0 \Leftrightarrow I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$$

εφαρμογή 4Ζ.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+1$.Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{4} f^{-1}(x)dx$

λύση

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με $f'(x)=3x^2+2>0$,δηλαδή είναι γνησίως αύξουσα ,άρα και 1–1 και κατά συνέπεια θα αντιστρέφεται .
- Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$,οπότε και $x=f(u)$.
- Είναι $dx=df(u)=f'(u)du$ και για τα νέα άκρα έχουμε :

↳ $u_1=f^{-1}(1)\Rightarrow 1=f(u_1)\Rightarrow f(u_1)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} u_1=0$ και

↳ $u_2=f^{-1}(4)\Rightarrow 4=f(u_2)\Rightarrow f(u_2)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} u_2=1$ και έτσι παίρνουμε

$$\int_{1}^{4} f^{-1}(x)dx=\int_{0}^{1} uf'(u)du=\int_{0}^{1} xf'(x)dx=\int_{0}^{1} x(3x^2+2)dx=\int_{0}^{1}(3x^3+2x)dx=\left[\frac{3x^4}{4}+x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

εφαρμογή 4Ζ.2

α.Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx$.

λύση

α.Δες την απόδειξη παραπάνω στην μέθοδο 4Ζ

β.Κάνουμε εφαρμογή του α. ερωτήματος για $f(x) = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}$,

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = \frac{\pi}{3}$,οπότε έχουμε :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \overset{(\alpha)}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sigma\varphi^3 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^3 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx = J$$

Έχουμε λοιπόν

- $I = J$ και
- $I+J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varepsilon\varphi^3 x}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} I = J \\ I+J = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{12}$$, δηλαδή $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^3 x}dx = \frac{\pi}{12}$

εφαρμογή 4Ζ.3

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha+\beta-x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$,να δείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

λύση

Θέτουμε $I = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \overset{(\upsilon\pi o\vartheta)}{\Rightarrow} I = \int_{\alpha}^{\beta} xf(\alpha+\beta-x)dx$

- Κάνουμε αντικατάσταση $\alpha+\beta-x = u \Rightarrow x = \alpha+\beta-u$
- Διαφορίζουμε και είναι $d(\alpha+\beta-x) = du \Rightarrow (\alpha+\beta-x)' dx = du \Rightarrow -dx = du \Rightarrow dx = -du$

• νέα άκρα $u_1=\alpha+\beta-x\big|_{x=\alpha}=\beta$ και $u_2=\alpha+\beta-x\big|_{x=\beta}=\alpha$

είναι

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}xf(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\beta}^{\alpha}(\alpha+\beta-u)f(u)(-du)=-\int_{\beta}^{\alpha}(\alpha+\beta-u)f(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}(\alpha+\beta-u)f(u)du$$

$$=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du-\int_{\alpha}^{\beta}uf(u)du=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du-I\Rightarrow 2I=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\Rightarrow I=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

εφαρμογή 4Ζ.4

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-5}^{5}x^{17}\sigma\upsilon\nu^{15}x\,dx$

λύση

Θέτουμε $f(x)=x^{17}\sigma\upsilon\nu^{15}x$ οπότε $f(-x)=(-x)^{17}\sigma\upsilon\nu^{15}(-x)=-x^{17}\sigma\upsilon\nu^{15}x=-f(x)$

δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή και κατά συνέπεια έχουμε

$$\int_{-5}^{5}x^{17}\sigma\upsilon\nu^{15}x\,dx=0$$

εφαρμογή 4Ζ.5

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle I=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$

λύση

Είναι $\displaystyle I=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=I_1+I_2\quad(1)$

• Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$ είναι περιττή γιατί

$$f(-x)=\frac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}}=-\frac{-x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}=-f(x)$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx=0$$

• Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$ είναι άρτια γιατί

$$g(-x)=\frac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}}=\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}=g(x)$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=2\int_0^1\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx\overset{x>0}{=}2\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx=2\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}dx=2\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1=$$

$$=2\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1=2\left\{\ln\left(1+e^1\right)-\ln\left(1+e^0\right)\right\}=2\ln\frac{1+e}{2}$$

εφαρμογή 4Ζ.6

i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

λύση

i) $f\,'(x)=\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ii) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\overset{(i)}{=}\int_0^1 f\,'(x)dx=f(1)-f(0)=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})$

εφαρμογή 4Ζ.7

Έστω μία συνάρτηση f με συνεχή την f ΄΄ και για την οποία ισχύει

$$\int_0^\pi (f(x)+f\,''(x))\,\eta\mu x\,dx=2.$$

Αν f(π) =1, με την βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ,
να υπολογίσετε το f(0)

λύση

Είναι $\int_0^\pi (f(x)+f\,''(x))\,\eta\mu x\,dx=2 \quad\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx+\int_0^\pi f\,''(x)\,\eta\mu x\,dx=2$

$\int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^\pi (f\,'(x))'\,\eta\mu x\,dx=2$

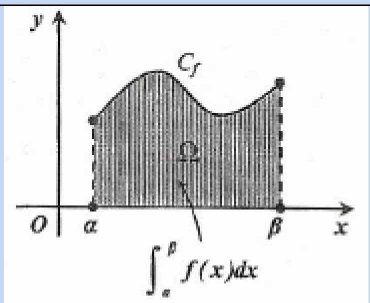
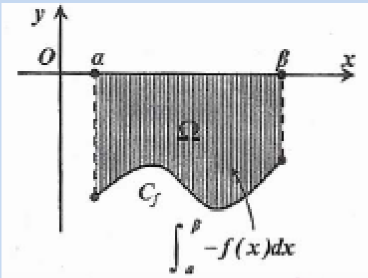
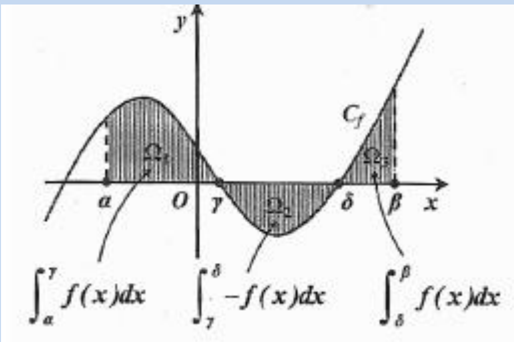
$[-\sigma\upsilon\nu x\; f(x)]_0^\pi+\int_0^\pi f\,'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx+[f\,'(x)\eta\mu x]_0^\pi-\int_0^\pi f\,'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx=2$

$(-\sigma\upsilon\nu\pi\, f(\pi)+\sigma\upsilon\nu 0\, f(0))+(f'(\pi)\,\eta\mu\pi-f'(0)\,\eta\mu 0)=2$

$1\cdot 1+1\cdot f(0)+0=2$,οπότε $f(0)=1$

Α. εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από μία συνάρτηση

☞ Το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\mathbf{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx}$. Ειδικά έχουμε

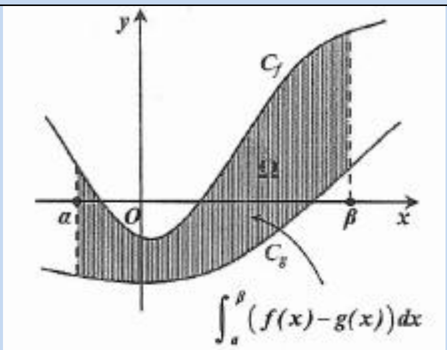
	Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε $E=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$
	Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε $E=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$
	Αν η $f(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,πχ στο διπλανό σχήμα ,θα ισχύει : $E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$ $\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx-\int_{\gamma}^{\delta}f(x)dx+\int_{\delta}^{\beta}f(x)dx$ όπου γ,δ είναι οι ρίζες της $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$

☞ στην περίπτωση που δεν δίνεται μια από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ (ή και τις δύο) ,θα παίρνουμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

Β. εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από δύο συναρτήσεις

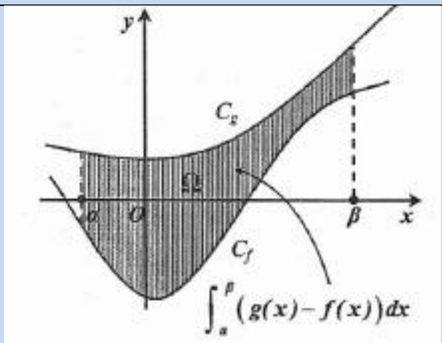
☞ Το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τις γραφικές παράσταση των συναρτήσεων f, g ,

τις ευθείες $x=\alpha,\ x=\beta$ είναι $\mathbf{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx}$. Ειδικά έχουμε



Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε

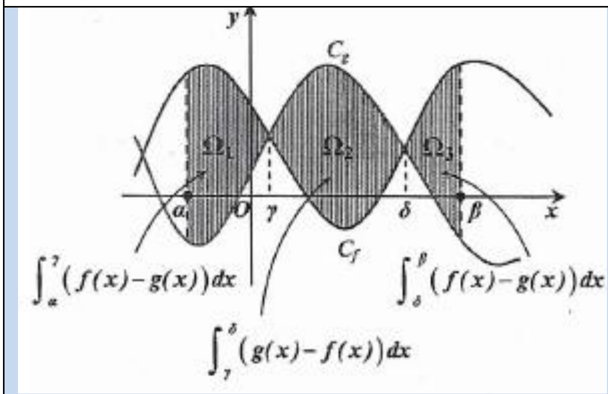
$$E=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$



Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε

$$E=-\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\rightarrow$$

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)-f(x))dx$$



Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,πχ στο διπλανό σχήμα ,θα ισχύει :

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+$$

$$+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

όπου γ,δ είναι οι ρίζες της $f(x)=g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$

☞ στην περίπτωση που δεν δίνεται μια από τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ (ή και τις δύο) ,θα παίρνουμε

τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$

εφαρμογή 5Α.1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x+3$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και τον άξονα των x

λύση

Βρίσκουμε το πρόσημο του τριώνυμου $f(x) = x^2 - 2x + 3$ στο διάστημα $[0,\ 2]$
$\Delta = 4 - 12 = -3 < 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3)dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^2$

$$= \frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{14}{3}$$

εφαρμογή 5Α.2

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ και τον άξονα των x

λύση

Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα των x έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ ή } x = 3 .$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[\ 0,\ 3]$

Πρόσημο της f :

x	$-\infty$ 0 3 $+\infty$
f(x)	+ 0 – 0 +

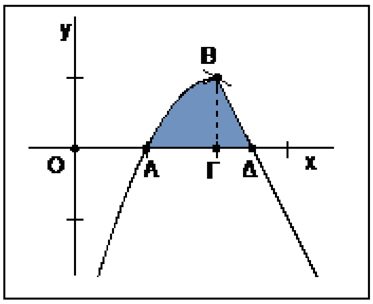
Επειδή $f(x) \le 0$ στο $[\ 0,\ 3]$, θα είναι $E = \int_0^3 - f(x)\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

εφαρμογή 5Α.3

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 2 \\ -2x + 5\ \ , & x \ge 2 \end{cases}$ και τον άξονα των x.

λύση



$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x^2 + 4x - 3) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-2x + 5) = 1$

$f(2) = 1$

άρα f συνεχής στο $x_o = 2$, άρα συνεχής στο □

Κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$: $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ άρα $A(1, 0)$

$$-2x+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{5}{2} \quad \text{άρα } \Delta\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$$

Πρόσημο του κλάδου $-x^2+4x-3$: $\quad -x^2+4x-3>0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow \ 1<x<3$ που ισχύει αφού $x\in[1,\ 2)$

Πρόσημο του κλάδου $2x+5$: $\quad -2x+5\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$$-2x\geq -5 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{2}$$

Επομένως $\quad E=\int_1^{\frac{5}{2}}|f(x)|dx = \int_1^2|f(x)|dx + \int_2^{\frac{5}{2}}|f(x)|dx$

$$= \int_1^2(-x^2+4x-3)dx+\int_2^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^2+\left[-x^2+5x\right]_2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left(-\frac{8}{3}+8-6\right)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)+\left(-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}\right)-(-4+10) = \frac{3}{4}$$

εφαρμογή 5Α.4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x-e, x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, x\geq 1 \end{cases}$ **.**

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου , το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=e .

λύση

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα .Είναι ακόμη :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(e^x-e)=e-e=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}=\dfrac{\sqrt{\ln 1}}{1}=0$, $f(1)=\dfrac{\sqrt{\ln 1}}{1}=0$,

άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\Re$.

Για κάθε $x\in[0\ ,\ 1)$ είναι $e^x<e^1 \Rightarrow e^x-e<0 \Rightarrow f(x)<0$ και για κάθε $x\in[1\ ,\ e]$

είναι $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\geq 0$.Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^e f(x)dx=$

$= \int_0^1(e-e^x)dx+\int_1^e\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = [ex-e^x]_0^1+\int_1^e(\ln x)^{\frac{1}{2}}(\ln x)'dx = [ex-e^x]_0^1+[\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}]_1^e=$

$= (e-e)-(0-1)+\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{5}{3}$ τ.μ.

εφαρμογή 5Α.5

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & , x \le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} & , x>3 \end{cases}$

α) Αν η f είναι συνεχής , να αποδείξετε ότι $-\dfrac{1}{9}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4 , f(4)) .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2

λύση

α) Αν η f είναι συνεχής θα είναι συνεχής και στο 3 ,άρα $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$.

Είναι $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3^+} \dfrac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+} (-e^{x-3}) = -1$,

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha$, $f(3) = 9\alpha$. Άρα $9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{9}$.

β) Για x > 3 είναι :

$f'(x) = \dfrac{(1-e^{x-3})'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2}$, επομένως

$f'(4) = \dfrac{-e\cdot 1-(1-e)}{1} = -1$. Ακόμη είναι $f(4) = \dfrac{1-e^{4-3}}{4-3} = 1-e$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(4 , f(4)) είναι : $y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y-(1-e) = -1(x-4) \Leftrightarrow y = -x+5-e$.

γ) Η f είναι συνεχής στο [1 , 2] άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^2 |f(x)|dx =$

$= \int_1^2 |\alpha| x^2 dx = |\alpha| \int_1^2 x^2 dx = |\alpha| [\dfrac{x^3}{3}]_1^2 = \dfrac{7}{3}|\alpha|$.

εφαρμογή 5Α.6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2+9x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1 , 3]$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=3

λύση

α) Για κάθε $x \in \Re$ είναι $f'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$. Το πρόσημο της f ΄(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο [1 , 3] .Λόγω της μονοτονίας της f στο [1 , 3] έχουμε : $1 \le x \le 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1) \ge f(x) \ge f(3) \Rightarrow f(x) \ge 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 + 1 \Rightarrow f(x) \ge 1$. Συνεπώς θα είναι και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$.

β) Για κάθε $x \in [1, 3]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και ισχύει $f(x) > 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx =$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 = 6 \text{ τ.μ.}$$

εφαρμογή 5B.7

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x - x^2$.

λύση

Βρίσκω τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων , οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = 2x - x^2$

$$x^3 - 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1$$

Διάστημα ολοκλήρωσης είναι το [-2, 1]

Η διαφορά $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1)$

Πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f(x)		–	0	+	0	–	0	+	

:

Επομένως $E = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_0^1 (-f(x) + g(x))dx$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= -4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{37}{32}$$

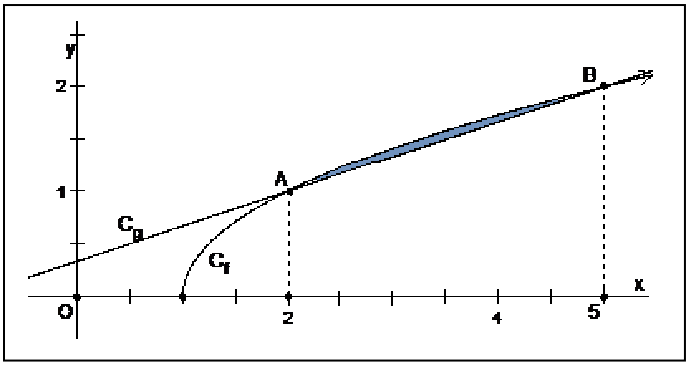
εφαρμογή 5B.8

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \textbf{και} \quad g(x) = \frac{x+1}{3}$$

λύση

Κοινό πεδίο ορισμού $[1, +\infty)$



Κοινά σημεία των C_f, C_g :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{x+1}{3}$

$x-1 = \dfrac{(x+1)^2}{9} \Leftrightarrow 9(x-1) = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow 9x - 9 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 5$

Πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$: $f(x)-g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq \dfrac{x+1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} \geq x+1 \Leftrightarrow 9(x-1) \geq (x+1)^2$

$\Leftrightarrow 9x-9 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$

$$E = \int_1^{\frac{5}{2}} |f(x)-g(x)|dx = \int_2^5 (f(x)-g(x))dx = \int_2^5 (\sqrt{x-1} - \frac{x+1}{3})dx = \int_2^5 \sqrt{x-1}dx - \int_2^5 \frac{x+1}{3}dx$$

$$= \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int_2^5 (x+1)dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_2^5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^5$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^5 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1) - \frac{1}{3}(\frac{25}{2}+5-\frac{4}{2}-2) = \frac{1}{6}$$

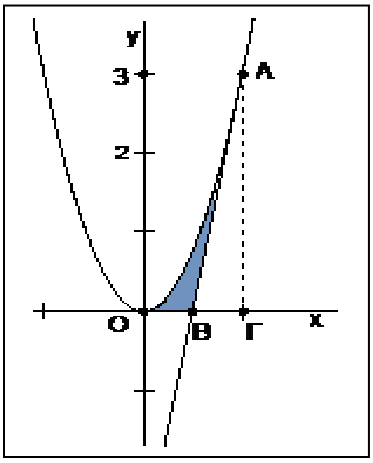
εφαρμογή 5Β.9

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1, 3).

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα των x.

λύση



i) $f'(x) = 6x$, $f(1) = 3$ και $f'(1) = 6$

Άρα η εφαπτομένη στο A είναι : $y-3 = 6(x-1) \Leftrightarrow y = 6x-3$

ii)

Αναζητάμε το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου OBA, όπου το B είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των x.

Για $y=0$, η $y = 6x-3 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, άρα $B\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Φέρνουμε $A\Gamma \perp x'x$, οπότε $\Gamma(1, 0)$

Ζητούμενο εμβαδό :

$$E = (\text{Μικτόγραμμο ΟΓΑ}) - (\text{Τρίγωνο ΒΓΑ})$$
$$= \int_0^1 |f(x)|dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(x)|dx = \int_0^1 |3x^2|dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 |6x-3|dx$$
$$= \int_0^1 3x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x-3)dx = \left[x^3\right]_0^1 - \left[3x^2-3x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= (1-0) - \left[3.1^2 - 3.1 - \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2}\right]\right] = 1 - \left[0 - \left[3.\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}\right]\right]$$
$$= 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

εφαρμογή 5Β.10

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{e}{x}$, $g(x) = \ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > e$.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

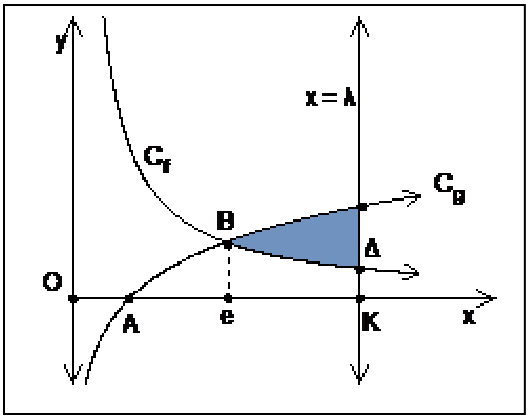
λύση

i) Κοινό πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

Κοινά σημεία των C_f, C_g : $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{e}{x} = \ln x \Leftrightarrow$ Προφανής ρίζα το e

Άρα B(e, 1)



Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$

με προφανή ρίζα το e.Είναι

$h'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$,

άρα h γν.αύξουσα $\Rightarrow$ το e μοναδική ρίζα.

Το ζητούμενο εμβαδόν περικλείεται από τη γραμμή ΑΒΔΚΑ

$$E(\lambda) = \int_1^e \ln x dx + \int_e^\lambda \frac{e}{x} dx \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1 dx = (e-0) - (e-1) = 1$

και $\int_e^\lambda \frac{e}{x} dx = \left[e \ln x\right]_e^\lambda = e\ln\lambda - e$

(1) $\Rightarrow$ $E(\lambda) = e\ln\lambda - e + 1$

ii) Είναι $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} (e\ln\lambda - e + 1) = +\infty$

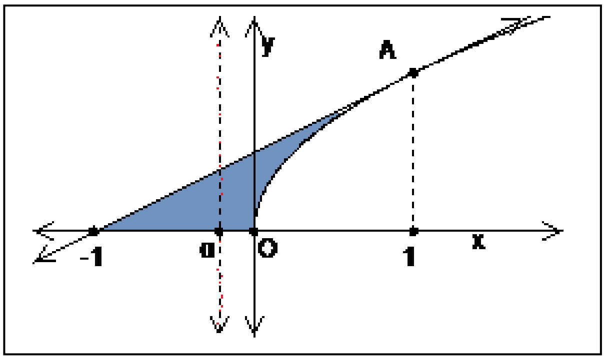
εφαρμογή 5Β.11

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$, την εφαπτόμενή της στο σημείο (1, 1) και τον άξονα των x.

ii) Να βρείτε την ευθεία $x=\alpha$ η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

λύση

i) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$



Εξίσωση της εφαπτόμενης στο A(1, 1) :

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Η εφαπτόμενη στο A τέμνει τον άξονα των x στο σημείο με τετμημένη την λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίζεται από τον άξονα των y σε δύο μέρη.

$$E=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ii) Εξετάζουμε αν υπάρχει τιμή του α με $-1\le \alpha \le 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{-1}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{E}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{\alpha}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$3\alpha^2+6\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{-3-\sqrt{6}}{3} \text{ ή } \alpha=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$$

Από αυτές, στο διάστημα [–1 , 0] ανήκει η $\alpha=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

Άρα η ευθεία $x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά τμήματα.

Αναζητώντας ευθεία $x=\alpha$ με $0\le \alpha \le 1$ φθάνουμε σε αδύνατη εξίσωση,

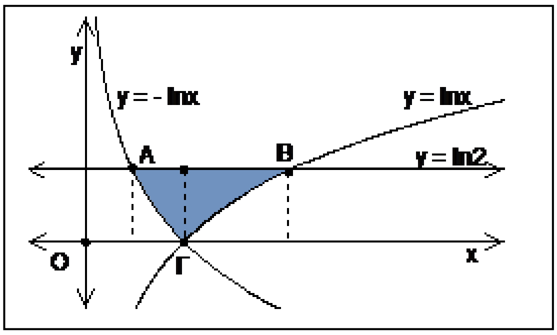
άρα δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

εφαρμογή 5B.12

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\frac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

λύση

Η συνάρτηση g γράφεται



$$g(x) = \ln\frac{1}{x}$$
$$g(x) = \ln 1 - \ln x$$
$$g(x) = -\ln x$$

Οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα των x.

Τετμημένη του σημείου τομής Α της C_g με την ευθεία $y = \ln 2$:

$$\ln\frac{1}{x} = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x_A = \frac{1}{2}$$

Τετμημένη του σημείου τομής Β της C_f με την ευθεία $y = \ln 2$:

$$\ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x_B = 2$$

Τετμημένη του σημείου τομής Γ των C_f, C_g :

$\ln x = -\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x_\Gamma = 1.$

Οι κάθετες στον άξονα $x'x$ από τα Α, Β ορίζουν τα άκρα ολοκλήρωσης.
Η κάθετος στον άξονα $x'x$ από το Γ χωρίζει το ζητούμενο εμβαδόν σε δύο μέρη.

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln 2 + \ln x)dx + \int_{1}^{2}(\ln 2 - \ln x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln 2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\, dx + \int_{1}^{2}\ln 2\, dx - \int_{1}^{2}\ln x\, dx$$

$$= \ln 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x'\ln x dx + \ln 2\int_{1}^{2} 1\, dx - \int_{1}^{2} x'\ln x\, dx$$

$$= \ln 2\cdot(1-\frac{1}{2}) + \left[x\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\, dx + \ln 2.\,(2-1) - \left[x\ln x\right]_{1}^{2} + \int_{1}^{2} 1dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + [1.\ln 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}] - (1-\frac{1}{2}) + \ln 2 - [2\ln 2 - 1.\ln 1] + (2-1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ln 2 - 2\ln 2 + 1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2}$$

εφαρμογή 5Β.13

Έστω Ε(λ) το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x)= 12e^x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, με $\lambda > 0$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του λ το εμβαδό Ε(λ) .

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

λύση

α) Αν $\lambda \in (0 , 1)$ τότε $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} (g(x) - f(x))dx = 12e - 12e^{\lambda} + \lambda\ln\lambda$.

Αν $\lambda = 1$ τότε $E(\lambda) = 0$. Αν $\lambda > 1$ τότε $E(\lambda) = \int_{1}^{\lambda} (g(x) - f(x))dx =$

$= -12e + 12e^{\lambda} - \lambda\ln\lambda$.

β) $$\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} (12e - 12e^{\lambda} + \lambda\ln\lambda) = 12e - 12 + \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$$

$$= 12e - 12 + \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = 12e - 12 + \lim_{\lambda \to 0^+} (- \lambda) = 12e - 12 .$$

↳ Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x)\geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$

↳ Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f(x)>0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

↳ Αν $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και η f δεν μηδενίζεται παντού στο $[\alpha,\beta]$, (δηλαδή να υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in[\alpha,\beta]:f(x_0)\neq 0$)

τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

↳ Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$,τότε :

- Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)dx$
- Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$
- Αν $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \\ \text{και} \\ \text{υπαρχει } x_0\in[\alpha,\beta]:f(x_0)\neq g(x_0)\end{cases} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta g(x)dx$

↳ Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leq\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

Για να αποδείξουμε ανισότητες με ολοκληρώματα ,χρησιμοποιούμε :

↳ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $m=\min f(x), M=\max f(x)$ για $x\in[\alpha,\beta]$,τότε ισχύει : $m\leq f(x)\leq M\Rightarrow ...$ $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

↳ τις βασικές ανισότητες

- $|\eta\mu x|\leq|x|$,$x\in R \Rightarrow |x|\leq \eta\mu x\leq |x|$,$x\in R$ και $\eta\mu x\leq x$,$x>0$
- $\ln x\leq x-1<x$,$x>0$, $e^x\geq x+1>x$, $x\in R$ και $e^{\varphi(x)}\geq\varphi(x)+1>\varphi(x)$, $\varphi(x)\in R$
- τις ανισότητες που προκύπτουν από το ΘΜΤ ,την μονοτονία και ακρότατα της f .
- τις ανισότητες που προκύπτουν από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτόμενη της σε ένα σημείο .

↳ τις αλγεβρικές βασικές ανισότητες $\frac{2x}{x^2+1}\leq 1$,$x\in R$ και $x+\frac{1}{x}\geq 2$,$x>0$

↳ τις όποιες ανισοτικές σχέσεις μπορούν να υπάρχουν στα δεδομένα της άσκησης ή μπορεί να έχουν προκύψει στην πορεία των ερωτημάτων της .

εφαρμογή 6Α.1

Να αποδείξετε τις ανισότητες

Α. $\displaystyle\int_0^1 \eta\mu x^3 dx < \frac{1}{4}$ **Β.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x^2+2}dx < \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$.

λύση

Α.Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \ge 0$ ισχύει $\eta\mu x \le x$ με το $''=''$ να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επίσης για το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \eta\mu x^3 dx$ έχουμε ότι $x\in[0,1]$,οπότε $\eta\mu x^3 \le x^3$ (1) με το $''=''$ να ισχύει μόνο για για $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (2).

Έτσι λόγω των (1) και (2) παίρνουμε $\displaystyle\int_0^1 \eta\mu x^3 dx < \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

Δηλαδή $\displaystyle\int_0^1 \eta\mu x^3 dx < \frac{1}{4}$.

Β.Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $\eta\mu x \le x \Rightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x^2+2} \le \dfrac{x}{x^2+2} \Rightarrow \dfrac{2\eta\mu x}{x^2+2} \le \dfrac{2x}{x^2+2}$ με το $''=''$ να ισχύει μόνο για για $x=0$.

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\eta\mu x}{x^2+2}dx < \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x^2+2}dx < \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_0^1$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Δηλαδή $\displaystyle\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{x^2+2}dx < \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$.

εφαρμογή 6Α.2

Να αποδείξετε τις ανισότητες

Α. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^4\right)dx < \frac{1}{5}$ **Β.** $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2-1}dx > \frac{1}{3}$.

λύση

Α.Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x \le x-1$ (1) με το $''=''$ να ισχύει μόνο για $x=1$.

Επίσης για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \ln\left(1+x^4\right)dx$ έχουμε ότι $x\in[0,1]$,οπότε θέτοντας στην (1) όπου

$x\to 1+x^4$ παίρνουμε : $\ln\left(1+x^4\right)\le\left(1+x^4\right)-1\Rightarrow \ln\left(1+x^4\right)\le x^4$

με το $''=''$ να ισχύει μόνο για για $1+x^4=1\Leftrightarrow x^4=0\Leftrightarrow x=0$ (2).

Έτσι λόγω των (1) και (2) παίρνουμε $\int_0^1 \ln\left(1+x^4\right)dx<\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$.

Δηλαδή $\int_0^1 \ln\left(1+x^4\right)dx<\frac{1}{5}$.

Β.Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\ge x+1$ (1) με το $''=''$ να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επίσης για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{x^2-1}dx$ έχουμε ότι $x\in[0,1]$,οπότε θέτοντας στην (1) όπου

$x\to x^2-1$ παίρνουμε : $e^{x^2-1}\ge\left(x^2-1\right)+1\Rightarrow e^{x^2-1}\ge x^2$

με το $''=''$ να ισχύει μόνο για για $x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\overset{(x\in[0,1])}{\Leftrightarrow} x=1$ (2).

Έτσι λόγω των (1) και (2) παίρνουμε $\int_0^1 e^{x^2-1}dx>\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$. Δηλαδή $\int_0^1 e^{x^2-1}dx>\frac{1}{3}$.

εφαρμογή 6Α.3

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(2\int_0^1 f(x)dx-1\right)x^3-\ln x\right]=+\infty$

λύση

Η παράσταση $2\int_0^1 f(x)dx-1$ του ολοκληρώματος μέσα στην παρένθεση μας προδιαθέτει να βρούμε το πρόσημο της .

• Η f είναι κυρτή ,οπότε η C_f βρίσκεται πάντα πάνω από την εφαπτόμενη της στο $x_0=0$,εκτός βέβαια από το σημείο επαφής $O(0,0)$.

• Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0=0$ είναι (ε) : $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$

• Έτσι έχουμε $f(x)\ge x$ για κάθε $x\in[0,1]$,με το $''=''$ να ισχύει μόνο για $x=0$.

• Οπότε $\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx>\frac{1}{2}\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx>1\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx-1=c>0$

• Έτσι το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[cx^3-\ln x\right]\underset{\infty-\infty}{\overset{c>0}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(c-\dfrac{\ln x}{x^3}\right)$ (1) .Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^3}=0$ και από την (1) παίρνουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\left(c-\frac{\ln x}{x^3}\right)=(+\infty)(c-0)\overset{c>0}{=}+\infty$$

εφαρμογή 6Α.4

Να αποδειχθεί ότι :
α) Η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα .
β) Για $\kappa\geq1$ ισχύουν : $\sqrt{\kappa}\leq\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\leq\sqrt{\kappa}$

λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A=[0 , +∞) και είναι συνεχής σε αυτό . Ακόμη για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

β) Για κάθε $x\in[\kappa,\kappa+1]$ είναι $\kappa\leq x\Rightarrow\sqrt{\kappa}\leq\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}-\sqrt{\kappa}\geq0$

$$\Rightarrow\int_{\kappa}^{\kappa+1}(\sqrt{x}-\sqrt{\kappa})dx\geq0\quad\Rightarrow$$

$$\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx-\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{\kappa}dx\geq0\Rightarrow\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx\geq\sqrt{\kappa}\int_{\kappa}^{\kappa+1}1dx\Rightarrow\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx\geq\sqrt{\kappa}\,(\kappa+1-\kappa)\Rightarrow$$

$$\int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx\geq\sqrt{\kappa}\ .$$

Για κάθε $x\in[\kappa-1,\kappa]$ είναι $x\leq\kappa\Rightarrow\sqrt{x}\leq\sqrt{\kappa}\Rightarrow\sqrt{\kappa}-\sqrt{x}\geq0\Rightarrow\int_{\kappa-1}^{\kappa}(\sqrt{\kappa}-\sqrt{x})dx\geq0$

$$\Rightarrow\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{\kappa}dx-\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\geq0\Rightarrow\sqrt{\kappa}\int_{\kappa-1}^{\kappa}1dx-\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\geq0\Rightarrow\sqrt{\kappa}\,[\kappa-(\kappa-1)]\geq\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\Rightarrow$$

$$\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx\leq\sqrt{\kappa}\ .$$

εφαρμογή 6Α.5

Να αποδειχθεί ότι : $2<\int_{-1}^{1} e^{1-x^2}dx<2e$

λύση

Είναι

● Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x^2}$ έχει παράγωγο $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$ με $x\in[-1,1]$

Είναι $f'(x)=0\Rightarrow -2xe^{1-x^2}=0\Rightarrow x=0$ και από τον πίνακα

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1		2
	$f(-1)=1$ min	$f(0)=e$ max	$f(1)=1$ min

προκύπτει ότι $1\le f(x)\le e$. Όμως η f για τα $x\in[-1,1]$ παίρνει και άλλες τιμές εκτός των $1,e$ (αφού δεν είναι σταθερή).

Κατά συνέπεια

$$\int_{-1}^{1}1\cdot dx<\int_{-1}^{1}f(x)dx<\int_{-1}^{1}e\,dx\Rightarrow 1\cdot(1+1)<e^{1-x^2}\int_{-1}^{1}dx<e\cdot(1+1)\Rightarrow 2<\int_{-1}^{1}e^{1-x^2}dx<2$$

6Β. ανισότητες – 2 — ειδικές συνθήκες ολοκληρωμάτων

↳ Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta \quad ή\\ \exists x_0\in(\alpha,\beta): f(x_0)=0\end{cases}$ $\boxed{f \text{ συνεχής}}$

↳ Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to R$, όπου Δ διάστημα, είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε είναι $\alpha=\beta$.

↳ Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to R$, όπου Δ διάστημα, είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε είναι $\alpha=\beta$.

↳ Αν η συνάρτηση $f:\Delta\to R$, όπου Δ διάστημα, είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε είναι $\alpha=\beta$.

↳ Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ για την οποία ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Τότε ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0\ ,\ x\in[\alpha,\beta]$

εφαρμογή 6Β.1

Για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$.Τότε :

$\alpha = \beta$ ή $\exists x_0 \in (\alpha,\beta): f(x_0) = 0$

απόδειξη

Έστω δεν ισχύουν τα παραπάνω.Δηλαδη $\alpha \neq \beta$ **και** δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$

• Από το πρώτο $\alpha \neq \beta$,υποθέτουμε (χωρίς βλάβη γενικότητας) ότι $\alpha < \beta$.

• Από το δεύτερο προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.Η f ως συνεχής και μη μηδενιζόμενη διατηρεί πρόσημο και έτσι :

↳ Αν $f(x) < 0$ θα είναι και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$,άτοπο και

↳ Αν $f(x) > 0$ θα είναι και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$,άτοπο .Κατά συνέπεια ισχύει το ζητούμενο .

εφαρμογή 6Β.2

Έστω η συνάρτηση $f: \Delta \to R$,συνεχής στο διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Τότε αν $\alpha,\beta \in \Delta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$,να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

απόδειξη

1ος τρόπος

• Έστω F είναι μια παράγουσα της f στο Δ ,δηλαδή $F'(x) = f(x), x \in \Delta$.

• Είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = 0 \Rightarrow [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = 0 \Rightarrow F(\alpha)\text{-}F(\beta)=0 \Rightarrow F(\alpha)=F(\beta) \quad (1)$

Όμως $F'(x) = f(x) > 0, x \in \Delta$,οπότε $F \uparrow$ στο Δ ,άρα και 1−1.Έτσι από την (1) παίρνουμε $\alpha = \beta$

2ος τρόπος

Έστω ότι $\alpha \neq \beta$

• Αν $\alpha < \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$ που είναι άτοπο .

• Αν $\alpha > \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx < 0$ που είναι άτοπο . Άρα $\alpha = \beta$

εφαρμογή 6Β.3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0\ ,\ x\in[\alpha,\beta]$

λύση

• Αν $f(x)=0$ τότε θα ισχύει και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

• Έστω τώρα ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\neq 0$.

Έτσι έχουμε $f(x)\geq 0$ και επειδή υπάρχει μη μηδενικη τιμή ,θα ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ που είναι άτοπο

.

Άρα $f(x)=0\ ,x\in[\alpha,\beta]$

εφαρμογή 6Β.4

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αι $\int_{f(1)}^{f(2)-3} f(x)dx=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$,ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x$.

λύση

• Έστω F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.Τότε θα έχουμε :

$$\int_{f(1)}^{f(2)-3} f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_{f(1)}^{f(2)-3} F'(x)dx=0 \Leftrightarrow F(f(2)-3)-F(f(1))=0 \Leftrightarrow F(f(2)-3)=F(f(1))\quad (1)$$

• Όμως $F'(x)=f(x)\overset{(\upsilon\pi o\theta)}{>}0$,οπότε $F\uparrow\mathbb{R}$,άρα και $1-1$.

Οπότε από την (1) παίρνουμε $f(2)-3=f(1)\Leftrightarrow f(2)-f(1)=3\quad(2)$

• Όμως για την συνάρτηση f ισχύουν οι προυποθέσεις του ΘΜΤ στο $[1,2]$,αφού είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.Οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\overset{(2)}{=}3$$,δηλαδή ισχύει το ζητούμενο .

3 ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ εξετάσεων

δες λύσεις

Α ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1. μονοτονία - ανισότητα - εφαπτόμενη - εμβαδό με αντίστροφη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(\ln x)\le f(x-1)$ για κάθε $x>0$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) τέμνει την γραφική παρασταση της f^{-1} σε ένα μόνο σημείο .

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

2. ΠΟ - όρια - σχέση παραγώγων - ολοκλήρωμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ και $g(x)=\ln f(x)$

Α.Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της g ,είναι $A_g=R$

Β. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

Γ.Να αποδείξετε ότι $g'(x)\sqrt{x^2+1}=-1$.

Δ.Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

3. απο ΔΕ απόδειξη σχέσης - εύρεση τύπου - όριο - ολοκλήρωμα

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $xf'(x)=\dfrac{x+1}{e^{f(x)}+1}$

Α. Να δείξετε ότι :

i) $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$

ii) ο τύπος της f είναι $f(x)=\ln x$

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{e^{f(x)+x}-f^{-1}(x)+f(x)}$

Γ. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(e^{f(x+1)}+f(x+1)\right)dx$

4. εύρεση τύπου - όριο - ολοκλήρωμα

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$f(x)+x^2f'(x)=0$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $f(1)=e^{-2}$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{\frac{1}{x}-3}$

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$

Γ. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2}\dfrac{f(x)}{x^2}dx$

5. εύρεση τύπου - μονοτονία- εξίσωση - ανισότητα

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$,για την οποία ισχύει

$f(x)+f'(x)=e^x$ με $f(0)=1$

Α.Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

Β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{e^{f'(x)}-e^{-f'(x)}}{2015}=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα .

Δ. Αν $\alpha\in R$,να δείξετε ότι $\int_1^{\alpha^2+3}\left(e^{x^2+3}-\dfrac{1}{e}\right)dx>\int_1^{\alpha^2+3}\left(e-\dfrac{1}{e^{x^2+3}}\right)dx$

6. εύρεση συνάρτησης - αντίστροφη - ολοκλήρωμα - όρια

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $\dfrac{2+f^2(x)}{xf(x)+9}=2$ με $f(0)=4$

Α. Να βρεθεί ο τύπος της f

Β. Αν $g(x)=\ln f(x)$ τοτε:

i) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται.

ii) να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Γ. Αποδείξτε οτι $\int_0^3 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}+\int_0^3 \sqrt{x^2+16}=15$

Δ. Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x-\ln x}$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{e^{\frac{2}{\pi}x}+f^2(x)}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}$

7. εύρεση παραμέτρου απο συνθήκη ορίου-ολοκληρώματα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+(\alpha+1)x$ με $\alpha\in R$.

Α. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha\in R$ αν γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Β. Για την τιμή του α που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $I_1=\int_0^1 \dfrac{x}{f^2(x)}dx$ και ii) $I_2=\int_0^1 xf(x)dx$

8. εύρεση τύπου-όριο-ολοκλήρωμα

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$,με

$3f'(x)=6f(x)+2$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$.

Α.Να δείξετε ότι $f(x)=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}e^{2x}$.

Β.Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3f(x)\eta\mu x}{x^2}$

Γ.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 3xf(x)dx$

9. εύρεση τύπου-όριο-ολοκλήρωμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x+2}$.

Α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

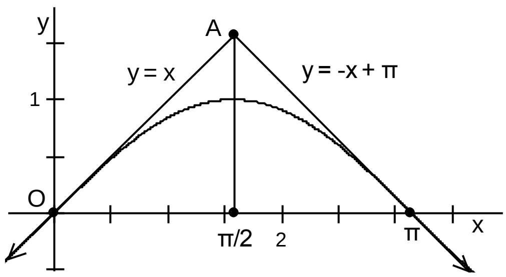
Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

10. εφαπτόμενη-εμβαδό-όριο-ολοκλήρωμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημx$

Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία $O(0, 0)$ και $A(π, 0)$



Β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις παραπάνω εφαπτόμενες .

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{π} f(x) e^x dx$

11. εύρεση παραμέτρου - όριο-ολοκλήρωμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

Α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x^2 - 4x + 4)}{e^{x-2} - 1}$

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτόμενή της στο σημείο $(1, 1)$ και τον άξονα των x.

Γ. Να βρείτε την ευθεία $x = α - 1$ η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

12. εύρεση τύπου-μονοτονία-εξίσωση-ολοκλήρωμα

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν : $f(1)=\frac{3}{2}$

και $f(x)+xf'(x)=\frac{-3x^3+4x+2}{2x}$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{\ln x}{x}+2$.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία ,ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x-2\alpha x=x^3$,όταν $\alpha\in R$.

Δ. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ,μ για τους οποίους ισχύει ότι :

$f(\kappa+1)+f(\lambda+2)=\mu^2-2\mu+4$.

Ε. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)dx$,όπου $\alpha>1$ και στην συνέχεια

το όριο $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$

13. εύρεση θέσης μεγίστου και τύπου – ύπαρξη - ανισότητες

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$,για την οποία ισχύουν :

$f(x)+f'(x)=\frac{1}{xe^x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και έχει μέγιστη τιμή το $\frac{1}{e}$,για

κάποιο $x_0\in(0,+\infty)$.

Α. Να αποδείξετε ότι η θέση μεγίστου είναι $x_0=1$.

Β. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx<3e-1$.

Δ.Έστω η συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της f με $F(1)=0$. Να αποδείξετε ότι :

i) η F έχει ελάχιστη τιμή η οποία είναι αρνητική.

ii) υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ ώστε $F(\xi)+f(\xi)=0$.

Ε. Να λύσετε την ανίσωση $e^{F(f(x))-F(xe^{-x})}\le 1$.

14. ασύμπτωτες – κρίσιμο σημείο- εμβαδό - ανισότητα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1 : Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Δ2 : Να δείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3 : **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες x=1 και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης **f f(x)=0** στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

Δ4 : Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)\ >\ xF(1)+F\left(x^2\right)\text{, για κάθε } x>1.$$

15. εξίσωση – ανισότητα – εμβαδό χωρίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$

Β.Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)}=2016f(x)+1$ έχει μια ακριβώς ρίζα .

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0=0$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$2f(x)-x-2\geq 0$$

Δ.Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_2^4\frac{e^x-1}{x}dx>5$

Ε. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $g(x)=\sqrt{x}f\left(\sqrt{x}\right)+1$,τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.

επιστροφή εκφων

Β ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

1.

Α. η συνάρτηση f ορίζεται στο R, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Είναι $f'(x) = 5x^2 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο R .

↳ Για τα τα κοίλα έχουμε $f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$ και φανερά το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο του x .Έτσι :

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$,οπότε

η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$

↳ η f είναι γνησίως μονότονη στο R ,οπότε είναι 1-1 άρα έχει αντίστοφη συνάρτηση

Β. είναι $f(\ln x) \le f(x-1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x \le x - 1$ που ισχύει (γνωστή εφαρμογή)

Γ. Η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) έχει εξίσωση

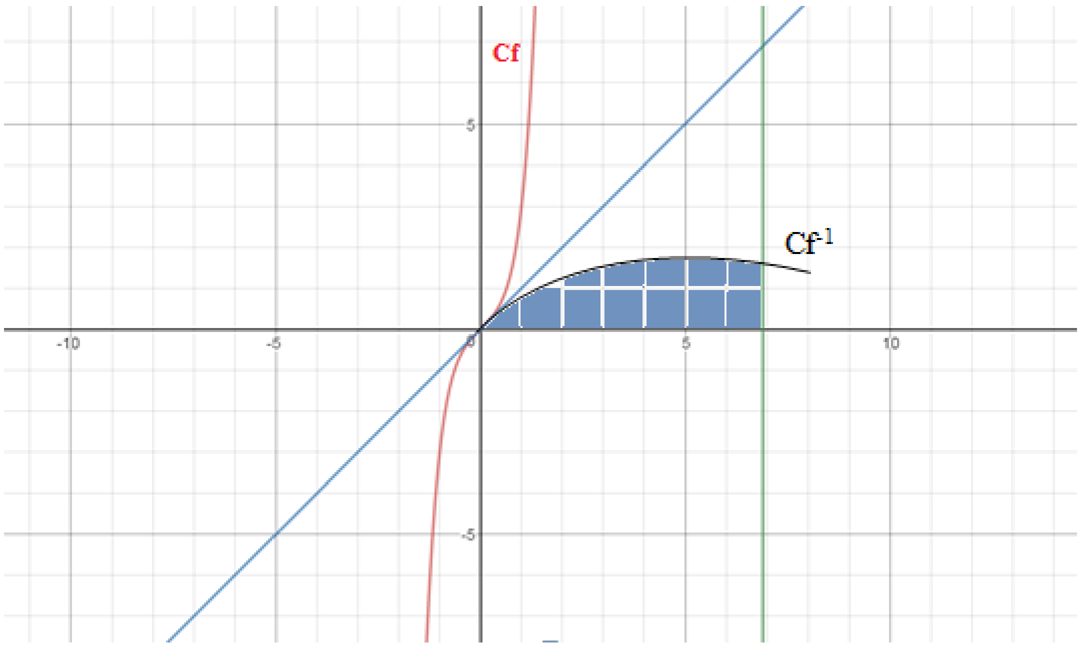
$$\left.\begin{array}{l} y - f(0) = f'(0)(x - 0) \\ f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow y = x$$

που είναι ως ηνωστόν άξονας συμμετρίας των f και f^{-1}

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα .Έτσι τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ (αν υπάρχουν) είναι και κοινά της C_f με την $y = x$.

Έτσι λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι η C_f τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο.

Πράγματι $f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = x \Leftrightarrow x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$



Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης

$f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(0)$ δηλαδή $x=f(0) \Leftrightarrow x=0$
Η f^{-1} είναι 1-1 αφού αντιστρέψιμη άρα δεν έχει άλλες ρίζες

$$E(\Omega)=\int_0^3 |f^{-1}(x)|dx \quad (1)$$

Όμως η f^{-1} διατηρεί πρόσημο στο [0,3] ως συνεχής και επειδή

$$f^{-1}(3)=1>0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)>0$$

$$\text{η } (1) \Leftrightarrow \quad E(\Omega)=\int_0^3 f^{-1}(x)dx \quad (2)$$

Θέτουμε $x=f(u) \Leftrightarrow u=f^{-1}(x)$ και τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι :

- $x=0 \Leftrightarrow f(u)=0 \Leftrightarrow f(u)=f(0) \Leftrightarrow u_1=0$ και
- $x=3 \Leftrightarrow f(u)=3 \Leftrightarrow f(u)=f(1) \Leftrightarrow u_2=1$

Έτσι από την (2) παίρνουμε $E(\Omega)=\int_0^1 f^{-1}(f(u))f'(u)du$

$$=\int_0^1 u\cdot f'(u)du=[uf(u)]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1(4^5+4^3+4)du$$

$$f(1)-\left[\frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=3-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=3-\frac{11}{12}=\frac{25}{12} \quad \text{τμ}$$

2.

Α. Πρέπει $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>x \quad (1)$

Όμως $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$, δηλαδή $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0,\ x\in R$.

Έτσι η (1) αληθεύει για κάθε $x\in R$, οπότε $A_g=R$

Β. Για τα όρια έχουμε

↳ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\begin{pmatrix} x\to+\infty \\ \Rightarrow x>0 \\ \Rightarrow |x|=x \end{pmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

$(*)$ **σχόλιο**

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνεχίσουμε και με ΚΠ ως εξής :

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} < f(x) < \frac{1}{|x|}$$

και απο ΚΠ προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

↳ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 2$

↳ για το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\ln f(x))$ υπολογίζουμε πρώτα το όριο

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \ldots = \lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 2(+\infty) = +\infty \text{ και έτσι}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(\ln f(x)) = \lim_{u\to+\infty}(\ln u) = +\infty$$

Γ. Είναι $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' - 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{2x-2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$

$= -\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ οπότε και

$$g'(x) = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ και έτσι}$$

$$g'(x)\sqrt{x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1} = -1.$$

Δ. Είναι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\left[\ln|f(x)|\right]_0^1 = -\ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)$

3.

Α. i) από την δοσμένη σχέση έχουμε ισοδύναμα

$$xe^{f(x)}f'(x) + xf'(x) = x+1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' + (f(x))' = (x+\ln x + c)' \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = (x + \ln x + c)'$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c \overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \quad (1)$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x + x$

Είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x)=e^x+1>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε από την σχέση (1) έχουμε :

$$e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x \Leftrightarrow h(f(x))=h(\ln x)\Leftrightarrow f(x)=\ln x.$$

B. Μετασχηματίζουμε την παράσταση του ζητούμενου ορίου ,επιδιώκοντας να την γράψουμε σε απλούστερη μορφή .Έχουμε

↳ $f(x)=\ln x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=e^x$

↳ $\dfrac{x^2-x}{e^{f(x)+x}-f^{-1}(x)+f(x)}=\dfrac{x^2-x}{e^x e^{f(x)}-f^{-1}(x)+f(x)}=\dfrac{x^2-x}{e^x e^{\ln x}-e^x+\ln x}=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)e^x+\ln x}$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{e^{f(x)+x}-f^{-1}(x)+f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)e^x+\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{e^x+(x-1)e^x+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{e+1}$$

Γ. Είναι $\displaystyle\int_0^1\left(e^{f(x+1)}+f(x+1)\right)dx\overset{(\upsilon\pi o\theta)}{=}\int_0^1((x+1)+\ln(x+1))dx=\int_0^1(x+1)dx+\int_0^1\ln(x+1)dx$

Όμως

↳ $\displaystyle\int_0^1(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{3}{2}$ και

↳ $\displaystyle\int_0^1\ln(x+1)dx=\int_0^1 x'\ln(x+1)dx\overset{\Pi O}{=}\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1 x\left[\ln(x+1)\right]'dx$

$\displaystyle=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{(x+1)-1}{x+1}dx$

$\displaystyle=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\left[x-\ln(x+1)\right]_0^1$

$=\ln 2-\{(1-\ln 2)-0\}=2\ln 2-1$

4.

A. Είναι $f(x)+x^2f'(x)=0$.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $x^2f(x)\neq 0$ και έχουμε

$$\frac{1}{x^2}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=0\Rightarrow(\ln f(x))'=\left(\frac{1}{x}\right)'\Rightarrow\int(\ln f(x))'dx=\int\left(\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x)=\frac{1}{x}+c\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{x}+c}\Rightarrow f(x)=ce^{\frac{1}{x}}\quad(2)$$

$$f(1)\overset{(2)}{=}ce^1\overset{\upsilon\pi o\vartheta}{=}e^{-2}\Leftrightarrow c=e^{-3}$$

$$\text{οπότε } \ f(x)=e^{\frac{1}{x}-3}$$

Β.Για το όριο έχουμε

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-3\right)=0-3=-3$,οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}-3}\right)=\lim\limits_{u\to-3}\left(e^{u}\right)=e^{-3}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=e^{-3}(+\infty)=+\infty$

Γ. Είναι

$$\int_1^{e^2}\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^{e^2}\frac{e^{\frac{1}{x}-3}}{x^2}dx=-\int_1^{e^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}-3}dx=-\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}-3\right)'e^{\frac{1}{x}-3}dx=-\int_1^{e^2}\left(e^{\frac{1}{x}-3}\right)'dx$$

$$=-\left[e^{\frac{1}{x}-3}\right]_1^{e^2}=-\left\{e^{\frac{1}{e^2}-3}-e^{\frac{1}{1}-3}\right\}=\frac{1}{e^2}-e^{\frac{1}{e^2}-3}$$

5.

Α.Είναι $f(x)+f'(x)=e^{x}$.

Πολλαπλασιάζουμε με e^{x} και έχουμε

$$f'(x)\cdot e^{x}+f(x)\cdot\left(e^{x}\right)'=e^{2x}\Rightarrow\left(e^{x}\cdot f(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$$

οπότε $e^{x}\cdot f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+c\overset{\cdot e^{-x}}{\Rightarrow}f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}+ce^{-x}\quad(1)$

Όμως $f(0)\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{2}e^{0}+ce^{0}\overset{\text{υποθ}}{=}1\Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$ οπότε από την (1) θα έχουμε

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

Β. Είναι

και για το πρόσημο της $f'(x)$ λύνουμε την ανίσωση

$f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)>0$

$e^{x}>e^{-x}\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$

x	**-**	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

Έτσι έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ. Για την εξίσωση έχουμε

$$\frac{e^{f'(x)}-e^{-f'(x)}}{2015}=0 \Leftrightarrow e^{f'(x)}-e^{-f'(x)}=0 \Leftrightarrow e^{f'(x)}=e^{-f'(x)} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f'(x)=-f'(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=e^{-x}$$

$\Leftrightarrow x=-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ μοναδική ρίζα

(γιατί προκύπτει με αλγεβρική διαδικασία)

αλλιώς

$$\frac{e^{f'(x)}-e^{-f'(x)}}{2015}=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \quad (3)$$

Όμως $f''(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=f(x)>0$,οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα ,άρα και $1-1$.

Έτσι από την (3) παίρνουμε $f'(x)=f'(0) \Leftrightarrow x=0$

Δ. Φανερά ισχύει $\alpha^2+3>1$ και έτσι απαιτούμε αντίστοιχη διάταξη των συναρτήσεων μέσα στα ολοκληρώματα .

Αρκεί λοιπόν $e^{x^2+3}-\frac{1}{e}\ge e-\frac{1}{e^{x^2+3}} \Leftrightarrow e^{x^2+3}+\frac{1}{e^{x^2+3}}\ge e+\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x^2+3}+e^{-x^2-3}\ge e+e^{-1}$

$$\overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{e^{x^2+3}+e^{-x^2-3}}{2}\ge \frac{e+e^{-1}}{2} \Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)\ge f(1) \Leftrightarrow x^2+3\ge 1 \Leftrightarrow x^2+2\ge 0$$

που βέβαια ισχύει

6.

Α. είναι

$$\frac{2+f^2(x)}{xf(x)+9}=2 \Leftrightarrow 2xf(x)+18=2+f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+16$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+16 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+16} \quad (1)$$

Θέτουμε $h(x)=f(x)-x$ και από την (1) παίρνουμε

$$|h(x)|=\sqrt{x^2+16} \quad (2).$$

Όμως $x^2+16>0, \vee x\in \mathbb{R}$,άρα η $h(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $h(0)=f(0)-0=4>0$,οπότε και $h(x)>0$, $\forall x\in \mathbb{R}$.

Έτσι απο την (2) παίρνουμε

$$h(x)=\sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+16} \text{ , } x\in R$$

Β. i) Για το ΠΟ της $g(x)=\ln f(x)$ πρέπει $f(x)>0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+16}>0$

Όμως $x+\sqrt{x^2+16} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2+16} > 0 \quad \forall x \in R$.

Έτσι είναι $A_g = R$

Επίσης είναι

↳ $f'(x) = \left(x+\sqrt{x^2+16}\right)' = x' + \left(\sqrt{x^2+16}\right)' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+16}}\left(x^2+16\right)'$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \frac{x+\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}} > 0 \quad \forall x \in R \text{ και}$$

↳ $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}}{x+\sqrt{x^2+16}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}} > 0$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα,άρα και $1-1$,άρα υπάρχει η $g^{-1}(x)$.

ii) είναι

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2+16}) \Leftrightarrow e^y - x = \sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow (e^y - x)^2 = x^2+16 \Leftrightarrow$$

$$e^{2y} - 16 = 2xe^y \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-16}{2e^y}.$$

Άρα $g^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-16}{2e^x} \quad , x \in \mathbb{R}$.

Το ΣΤ της $g(x)$ είναι το R αφού

$\Sigma T_{g^{-1}} = A_g = R$.

Γ. Είναι $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx + \int_0^3 \sqrt{x^2+16}dx = \int_0^3 \left(\sqrt{x^2+16} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx$

$$= \int_0^3 \left(x\sqrt{x^2+16}\right)' dx = \left[x\sqrt{x^2+16}\right]_0^3 = 15 - 0 = 15$$

Δ. για τα όρια έχουμε

↳ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x-\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-\ln x} \cdot f(x)$

Όμως

- Η f είναι συνεχής στο R ,οπότε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = f\left(0\right) = 4$ και
- $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(x+-\ln x) = 0-(-\infty) = +\infty$ και κατά συνέπεια $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x-\ln x} = 0$

Έτσι έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x-\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-\ln x} \cdot f(x) = 0 \cdot 4 = 0$

↳ για το δεύτερο όριο έχουμε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{\frac{2}{\pi}x}+f^2(x)}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}\left(e^{\frac{2}{\pi}x}+f^2(x)\right)\quad(3)$$

Όμως

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1)=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=1-0-1=0$ και

  $x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\eta\mu x<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\eta\mu x<1$ αφού $y=\eta\mu x$ γνησίως αυξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

$x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x>0\Rightarrow-\sigma\upsilon\nu x<0$ αφού $y=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Έτσι με πρόσθεσης κατά μέλη έχουμε: $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x<1\Leftrightarrow\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1<0$

Οπότε με αντικατάσταση $y=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1$ έχουμε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim_{y\to0^-}\frac{1}{y}=-\infty$$

- επίσης $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(e^{\frac{2}{\pi}x}+f^2(x)\right)\overset{(f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma)}{=}e+f^2(\frac{\pi}{2})=e+\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{x}+16}\right)^2>0$

Έτσι από την σχέση (3) παίρνουμε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}\left(e^{\frac{2}{\pi}x}+f^2(x)\right)=(-\infty)\left[e+\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{x}+16}\right)^2\right]=-\infty$$

7.

Α. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+(\alpha+1)x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\alpha+1\right)}{x}=\alpha+2\overset{\upsilon\pi}{=}1\Rightarrow\alpha=-1$

Β. έχουμε $f(x)=\sqrt{x^2+1}$,οπότε

i) Είναι $I_1=\int_0^1\frac{x}{f^2(x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln2$ και

ii) $I_2=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ και εργαζόμαστε με αντικατάσταση

- Θέτουμε $x^2+1=u$

- $d\left(x^2+1\right)=du \Rightarrow 2xdx=du \Rightarrow xdx=\frac{du}{2}$
- νέα άκρα $u_1=x^2+1\big|_{x=0}=1$ και $u_2=x^2+1\big|_{x=1}=2$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_2=\int_1^2 \sqrt{u}\,\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

8.

Α.Για κάθε $x\in R$ έχουμε :

$$3f'(x)=6f(x)+2 \Rightarrow 3f'(x)-6f(x)=2 \overset{:3}{\Rightarrow} f'(x)-\frac{6}{3}f(x)=\frac{2}{3} \Rightarrow f'(x)-(2x)'f(x)=\frac{2}{3}$$

$$\overset{\cdot e^{-2x}}{\Rightarrow} f'(x)e^{-2x}+(-2x)'e^{-2x}f(x)=\frac{2}{3}e^{-2x} \Rightarrow \left(f(x)e^{-2x}\right)'=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' \Rightarrow$$

$$f(x)e^{-2x}=-\frac{1}{3}e^{-2x}+c \overset{\cdot e^{2x}}{\Rightarrow} f(x)=-\frac{1}{3}+ce^{2x} \qquad (1)$$

Για $x=0$,η (1) γράφεται $f(0)=-\frac{1}{3}+ce^{0} \Rightarrow 0=-\frac{1}{3}+c \Rightarrow c=\frac{1}{3}$,

οπότε από σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{2x}$

Β. για το όριο έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)\eta\mu x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{2x}-1\right)\eta\mu x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{x} \quad (2) \text{ και έχουμε}$$

↳ $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ όπου με ΚΠ παίρνουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

↳ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-2x}}-1\right)\cdot\frac{1}{x}=(0-1)\cdot 0=0$

Έτσι από την (2) προκύπτει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3f(x)\eta\mu x}{x^2}=0\cdot 0=0$

Γ. είναι

$$\int_0^1 3xf(x)dx=\int_0^1 3x\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{2x}\right)dx=\int_0^1\left(-x+xe^{2x}\right)dx=\int_0^1(-x)dx+\int_0^1 xe^{2x}dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx \overset{\Pi O}{=}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1 x'\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1=\ldots.$$

9.

Α. είναι $f(0)=\frac{5}{2}$ και

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}$,οπότε $f'(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,οπότε η εφαπτόμενη στο σημείο επαφής

$(0,f(0))=\left(0,\frac{5}{2}\right)$ έχει εξίσωση

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-\frac{5}{2}=\frac{3}{4}x\Leftrightarrow \quad (\varepsilon): y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

Β. το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=R-\{-2\}$ και έχουμε

- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(x+2+\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$ και κατά συνέπεια η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-2$.
- για την πλάγια ασύμπτωτη έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2+\frac{1}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+2+\frac{1}{x+2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2=\beta$$

άρα η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και όμοια στο $-\infty$.

Γ. είναι $f(x)>0$,για κάθε $x\in[0,1]$ και έτσι το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+2+\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)\right]_0^1$$

$$=\frac{5}{2}+\ln 3-\ln 2=\frac{5}{2}+\ln\frac{3}{2}$$

10.

Α. είναι

$f'(x)=\text{συν}x \quad \Rightarrow \quad f'(0)=1 \quad$ και $\quad f'(\pi)=-1$ οπότε :

↳ η εφαπτόμενη στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση :

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-\text{ημ}0=1(x-0)\Leftrightarrow \quad y=x$

↳ η εφαπτομένη στο $A(\pi,0)$ έχει εξίσωση :

$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\Leftrightarrow y-\text{ημ}\pi=-1(x-\pi)\Leftrightarrow y-0=-x+\pi$

$\Leftrightarrow y=-x+\pi$

Β.Το σημείο τομής Α των εφαπτομένων : $\begin{cases}y=x\\ y=-x+\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\ x=-x+\pi\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x = \pi \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Φέρνουμε την κάθετη από το A στον άξονα $x'x$, η οποία χωρίζει το ζητούμενο εμβαδόν σε δύο μέρη.

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \eta\mu x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi - \eta\mu x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \sigma\upsilon\nu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{8} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu 0\right) + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + \sigma\upsilon\nu\pi + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2 \ \tau\mu$$

Γ. είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} = \frac{1}{1} = 1$$

Δ. είναι

$$I = \int_0^{\pi} f(x)e^x dx = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x dx \overset{\Pi O}{=} \int_0^{\pi} (e^x)' \eta\mu x dx$$

$$= \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (\eta\mu x)' dx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$$

και συνεχίζουμε με δεύτερη παραγοντική

$$= \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (\sigma\upsilon\nu x)' dx\right) =$$

$$= \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x\eta\mu x dx}_{I}\right), \text{ οπότε}$$

$$I = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - I \Rightarrow 2I = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} \Rightarrow$$

11.

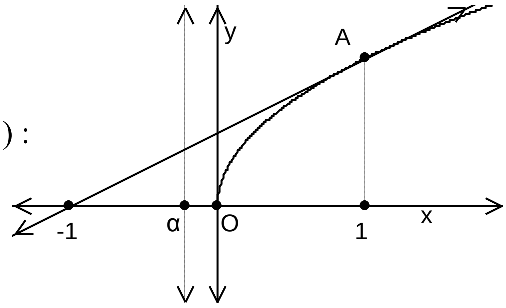
Α. είναι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x^2 - 4x + 4)}{e^{x-2} - 1} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{e^{x-2} - 1} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{e^{x-2} - 1} = \lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{e^{x-2} - 1}$$

$$\overset{\left(\substack{x\to 2^+ \\ x>2}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{e^{x-2} - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DH}{=}} \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{e^{x-2}} = 1$$

B. είναι

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \dfrac{1}{2}$



Οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης στο $A(1, 1)$:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\varepsilon) \ \ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Η εφαπτόμενη στο Α τέμνει τον άξονα των x στο σημείο με τετμημένη την λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Επειδή το ζητούμενο εμβαδόν χωρίζεται από τον άξονα των y σε δύο μέρη ,έχουμε

$$E = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Γ. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει τιμή του α με $-1 \le \alpha - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \alpha \le 1$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{-1}^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{E}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{\alpha-1} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha-1)^2}{4} + \frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \quad 3(\alpha-1)^2 + 6(\alpha-1) + 1 = 0$$

οπότε $\alpha\text{-}1 = \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ ή $\alpha\text{-}1 = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ή $\alpha = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Από αυτές, στο διάστημα $[0\,,1]$ ανήκει η $\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Άρα η ευθεία $x = \alpha - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{3} - 1$ χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

12.

Α. Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$x'f(x) + xf'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow (xf(x))' = \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \ln x + 2x\right)'$$

$$\Rightarrow (xf(x))' = \left(-\frac{1}{2}x^3 + \ln x + 2x\right)' \text{,οπότε } xf(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \ln x + 2x + c \quad (1)$$

και για $x = 1$ παίρνουμε $1\cdot f(1) = -\dfrac{1}{2}\cdot 1^3 + \ln 1 + 2\cdot 1 + c = \dfrac{3}{2} \Rightarrow c + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow c = 0$.

Έτσι από την (1) προκύπτει

$$xf(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \ln x + 2x \overset{:x>0}{\Rightarrow} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\ln x}{x} + 2$$

Β. Είναι :

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} - x = \dfrac{1-\ln x - x^3}{x^2}$, $x>0$ και θεωρούμε την συνάρτηση

$g(x) = 1-\ln x - x^3$, $x>0$,οπότε $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - 3x^2 < 0$,οπότε η g είναι □ στο $(0,+\infty)$

και ισχύει ακόμη , $g(1)=0$

•για $x>1 \overset{g(2)}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow 1-\ln x - x^3 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$,

•για $0<x<1 \overset{g(2)}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow 1-\ln x - x^3 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0		1	+∞
f′(x)	‖	+	0	−
f(x)	‖	↗		↘

και για την f έχουμε τον διπλανό πίνακα μεταβολών όπου προκύπτει ότι η f για $x=1$ έχει ολικό μέγιστο το $f(1) = \dfrac{3}{2}$.

Για το σύνολο τιμών της f παίρνουμε κάθε ένα από τα διαστήματα μονοτονίας .

↳ για $x \in A_1 = (0,1]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα ,οπότε

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \text{ ,αφού : } f(1) = \frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{\ln x}{x} + 2\right) = -\infty \text{ , εφόσον } \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$

↳ για $x \in A_2 = [1,+\infty)$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα ,οπότε

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \text{ ,αφού : } f(1) = \frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ εφόσον } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x} + x - 1\right) = +\infty$$

$$\text{άρα το σύνολο τιμών, είναι } f(A) = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

Γ. η εξίσωση γράφεται :

$$2\ln x - 2\alpha x = x^3 \Leftrightarrow 2\ln x - x^3 = 2\alpha x \overset{:2x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} = \alpha \overset{+2}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} + 2 = \alpha + 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \alpha + 2 \text{ , οπότε :}$$

• αν $\alpha < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2 < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2 \notin f(A)$,οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη .

• αν $\alpha = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2 \notin f(A)$ η εξίσωση γράφεται $f(x) = 0$

και έχει μοναδική λύση την $x=1$

• αν $\alpha>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \alpha+2>\frac{3}{2}\Leftrightarrow \alpha+2\in f(A)$,οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις εφόσον $\alpha+2\in f(A_1)$, $\alpha+2\in f(A_2)$ και σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2 η f είναι γνησίως μονότονη .

Δ. Είναι $f(\kappa+1)+f(\lambda+2)=\mu^2-2\mu+4\Leftrightarrow f(\kappa+1)+f(\lambda+2)=(\mu^2-2\mu+1)+3$

$$\Leftrightarrow f(\kappa+1)+f(\lambda+2)=(\mu-1)^2+3 \quad (2)$$

Είδαμε στο Α ερώτημα ότι : $f_{max}(x)=\frac{3}{2}$,οπότε $f(x)\le\frac{3}{2}$ για κάθε $x>0$ και έτσι :

• $f(\kappa+1)\le\frac{3}{2}$, $f(\lambda+2)\le\frac{3}{2}$,οπότε και

$f(\kappa+1)+f(\lambda+2)\le\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow f(\kappa+1)+f(\lambda+2)\le 3$

• είναι ακόμη $(\mu-1)^2+3\ge 3$

• έτσι η σχέση (2) ισχύει όταν :

$$\begin{cases} f(\kappa+1)+f(\lambda+2)=3 \\ (\mu-1)^2+3=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(\kappa+1)=f(\lambda+2)=\frac{3}{2} \\ (\mu-1)^2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \kappa+1=1 \text{ και } \lambda+2=1 \\ \mu-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \kappa=0 \text{ και } \lambda=-1 \\ \mu=1 \end{cases}$$

Ε. Για το ολοκλήρωμα έχουμε :

$$I(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)dx=\int_1^\alpha\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{x^2}{2}+2\right)dx=\int_1^\alpha(\ln x)'\ln x dx-\int_1^\alpha\left(\frac{x^2}{2}-2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{x^3}{6}+2x\right]_1^\alpha=\frac{1}{2}\ln^2\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+2\alpha-\frac{11}{6}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln^2\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+2\alpha-\frac{11}{6}\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha^3\left(\frac{\ln^2\alpha}{2\alpha^3}-\frac{1}{6}+\frac{2}{\alpha^2}-\frac{11}{6\alpha^3}\right)=(+\infty)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\infty$$

εφόσον $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln^2\alpha}{2\alpha^3}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(\ln^2\alpha)'}{(2\alpha^3)'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha(\ln\alpha)'}{3\alpha^2}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{3\alpha^3}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{9\alpha^3}=0$

13.

Α. Γνωρίζουμε ότι $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$,με $f(x_0)=\frac{1}{e}$ (1).

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,άρα και στο x_0,οπότε από Θ.Fermat προκύπτει ότι $f'(x_0)=0 \ (2)$

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση όπου x το x_0 και παίρνουμε :

$$f(x_0)+f'(x_0)=\frac{1}{x_0e^{x_0}} \text{ και λόγω των } (1),(2) \text{ ισοδύναμα έχουμε}$$

$$\frac{1}{e}+0=\frac{1}{x_0e^{x_0}} \Leftrightarrow \frac{1}{e}=\frac{1}{x_0e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0e^{x_0}=e \overset{:e}{\Leftrightarrow} x_0e^{x_0-1}=1 \Leftrightarrow x_0e^{x_0-1}-1=0 \ (3)$$

- Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=xe^{x-1}-1$ με $x>0$.
- Είναι $g'(x)=\left(xe^{x-1}-1\right)'=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,άρα και $1-1$.

Από την σχέση (3) έχουμε $g(x_0)=g(1) \overset{g\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x_0=1$.

Β. Πολλαπλασιάζουμε με e^x την δοσμένη σχέση $f(x)+f'(x)=\frac{1}{xe^x}$,οπότε :

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\frac{1}{xe^x} \Leftrightarrow \left(e^x\right)'f(x)+e^xf'(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(e^xf(x)\right)'=(\ln x)'$$

$$\text{οπότε } e^xf(x)=\ln x+c \text{ με } x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ η παραπάνω σχέση γράφεται : $e^1f(1)=\ln 1+c \Leftrightarrow e\frac{1}{e}=c \Leftrightarrow c=1$.

$$\text{Έτσι παίρνουμε } e^xf(x)=\ln x+1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$$

Γ. Για $x>0$ γνωρίζουμε ότι ισχύει $\ln x\le x-1<x \Rightarrow \ln x<x$,οπότε :

$f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}<\frac{1+x}{e^x} \Leftrightarrow f(x)<(1+x)e^{-x}$ οπότε και

$$\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2(1+x)e^{-x}dx \quad (4)$$

Όμως $\int_1^2(1+x)e^{-x}dx=\int_1^2(1+x)\left(-e^{-x}\right)'dx \overset{\text{ΠΟ}}{=} \left[-(1+x)e^{-x}\right]_1^2-\int_1^2(1+x)'\left(-e^{-x}\right)dx$

$$=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_1^2+\int_1^2 e^{-x}dx=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_1^2+\left[-e^{-x}\right]_1^2=\ldots=\frac{3e^2-e-3}{e^3}.$$

Έτσι από την (4) παίρνουμε :

$\int_1^2 f(x)dx<\frac{3e^2-e-3}{e^3}<\frac{3e^2-e}{e^3}<\frac{3e^2-e}{e}=3e-1$,άρα και $\int_1^2 f(x)dx<3e-1$.

Δ. i) Για την συνάρτηση $F(x)$,η οποία ως παράγουσα είναι φυσικά παραγωγίσιμη ,έχουμε : $F'(x)=f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$ με $x>0$ (5).

Είναι $F'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{e^x}>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα μεταβολών

x	**0**	$\mathbf{\frac{1}{e}}$	$+\infty$
F′(x)	-		+
F(x)	↓		↑

Η συνάρτηση F έχει ελάχιστη τιμή την $F\left(\frac{1}{e}\right)<0$,αφού

Για $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ είναι **F** ↑,οπότε $\frac{1}{e}<1 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F\left(\frac{1}{e}\right)<F(1)\Rightarrow F\left(\frac{1}{e}\right)<0$

ii) Αντικαθιστούμε στην ζητούμενη ισότητα όπου $\xi\to x$ και έχουμε :

$$F(x)+f(x)=0$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $h(x)$=$F(x)+f(x)=0$, η οποία

➯ Είναι φανερά συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$

➯ $h(1)$=$F(1)+f(1)=0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}>0$ και

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=F\left(\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)=F\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{\ln\frac{1}{e}+1}{e^x}=F\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{-\ln e+1}{e^x}=F\left(\frac{1}{e}\right)<0.$$

Κατά συνέπεια από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ ώστε $h(\xi)$=0

δηλαδή $F(\xi)+f(\xi)=0$

Ε. Η ανισωση με λογαρίθμιση γραφεται

$$\ln e^{F(f(x))-F(xe^{-x})}\le\ln 1\Leftrightarrow F(f(x))-F(xe^{-x})\le 0\Leftrightarrow F(f(x))\le F(xe^{-x}) \quad (6)$$

Όμως :

- $f(x)\le\frac{1}{e}$ (από υπόθεση) και
- $xe^{-x}\le\frac{1}{e} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{x-1}\ge x$ που ισχύει ,αφού με αντικατάσταση $x\to e^{x-1}$,στην γνωστή ανισότητα

$\ln x \le x-1 \quad (7)$ προκύπτει $e^{x-1} \ge x$.

Όμως η συνάρτηση F είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Και από την (6) παίρνουμε

$$f(x) \ge xe^{-x} \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{e^x} \ge xe^{-x} \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{e^x} \ge \frac{x}{e^x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} 1+\ln x \ge x \Leftrightarrow \ln x \ge x-1$$

και λόγω της (7) παίρνουμε $\ln x = x-1 \Leftrightarrow x=1$

14.

Δ1. Για κάθε $x \in (0,1)$ η f είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x>1$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = 1 \text{ και } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

άρα

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$ η μόνη θέση που θα εξετάσουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το $x_0 = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \frac{1}{x}+1\right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονα $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ2. Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f' δεν ορίζεται.

Για $x \in (0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x-1) - x\ln x,\ x \geq 1$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$g'(x) = -\ln x < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Οπότε

$$x > 1 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Rightarrow (x-1) - x\ln x < 0$$

άρα

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x(x-1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(2x-1)} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, επομένως στο $x_0 = 1$ έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Δ3. i) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0,1]$ με $f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $f(1) = 1$.

Επειδή $0 \in f(A_1)$ και f γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0,1]$, θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A_1$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1,+\infty)$ με $f(A_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [1,0)$, αφού $f(1) = 1$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Όμως $0 \notin f(A_2)$, άρα το $x_0 \in A_1$ είναι μοναδικό.

ii) Η f είναι συνεχής $(0,+\infty)$ άρα για το εμβαδόν του χωρίου έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} |f(x)|\,dx, \text{ αφού } x_0 \in (0,1]$$

άρα $x_0 < 1$ (προφανώς το $x_0 = 1$ δεν είναι ρίζα της f).

Επίσης για κάθε $x \in [x_0,1] \subseteq (0,1]$ είναι $f(x) > 0$ διότι

$$x \ge x_0 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \ge f(x_0) \Rightarrow f(x) \ge 0.$$

Οπότε

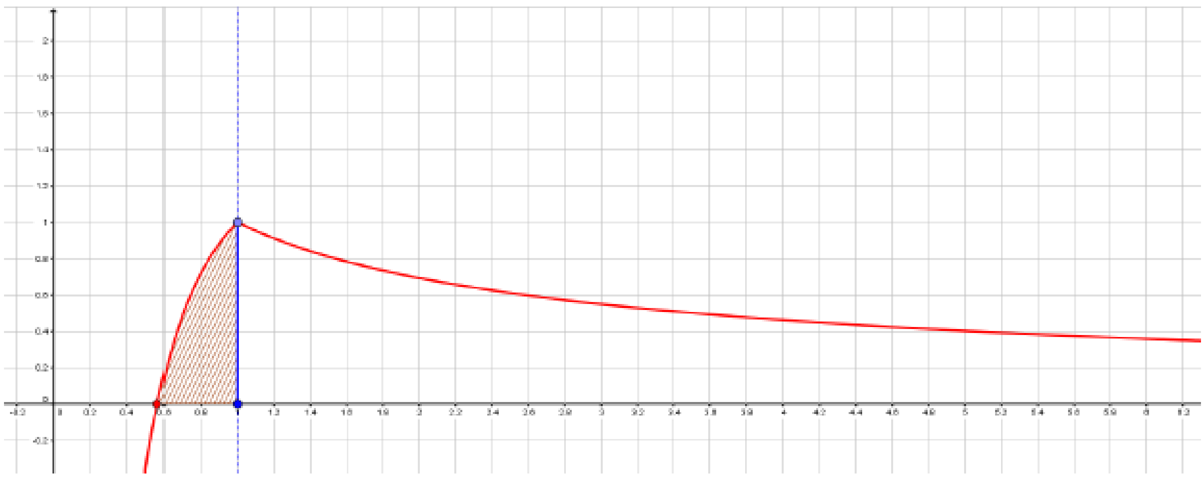
$$E(\Omega) = \int_{x_0}^{1} f(x)dx = \int_{x_0}^{1} \left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} + x\right]_{x_0}^{1} = 1 - \frac{\ln^2 x_0}{2} - x_0$$

Όμως $x_0 \in A_1$ και είναι ρίζα της f, οπότε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$$

Οπότε το εμβαδό γίνεται

$$E(\Omega) = 1 - \frac{x_0^2}{2} - x_0 = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$



(το σχήμα δεν είναι απαραίτητο να γίνει, το δίνουμε όμως για εκπαιδευτικούς σκοπούς)

Δ4. Για $x>1$ δείξαμε ότι

$$f'(x)<0 \Rightarrow F''(x)<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ η F' είναι συνεχής στο $x_0=1$ και άρα στο $[1,+\infty)$ επομένως η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Όμως για $x>1$ έχουμε $1<x<x^2$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,x^2]$.

Σε κάθε ένα από αυτά η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x)$ και $\xi_2 \in (x,x^2)$ (όπου ξ_1, ξ_2 συναρτήσεις του x) τέτοια ώστε:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1} \text{ και } F'(\xi_2)=\frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}=\frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)}$$

Οπότε:

$$\xi_1<\xi_2 \overset{F'\searrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1)>F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1}>\frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)}$$

$$\overset{x-1>0}{\Rightarrow} (x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2)$$

15.

β) $e^{f(x)}=2016f(x)+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}-1=2016f(x)$ (1)

Αν $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{x}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται.

Αν $f(x)\neq 0$ η (1) γίνεται: $\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=2016 \Leftrightarrow f(f(x))=2016$ (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\dfrac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$.

Για να βρούμε το πρόσημο της f' χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=(x-1)e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x<0 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)=0$ και για κάθε $x>0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)=0$, δηλαδή $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ άρα $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[(e^x-1)\cdot\frac{1}{x}\right]=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών:

$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Επειδή $2016 \in f(A)$ υπάρχει $x_1 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 2016$.

Επειδή $f(x_1) = 2016 > f(0) = 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι $x_1 > 0$. Τότε η (2)

γίνεται: $f(f(x)) = 2016 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x_1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = x_1$ (3)

Επειδή $x_1 \in f(A)$ υπάρχει $x_2 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = x_1$ και η (3) γίνεται:

$f(x) = f(x_2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = x_2$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1-x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2}$, άρα

η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση ε: $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Για κάθε $x \neq 0$ η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{\left[e^x + (x-1)e^x\right]x^{\cancel{2}} - \left[(x-1)e^x + 1\right]2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{(x^2-2x+2)e^x - 2}{x^3}.$$

Έστω $\varphi(x) = (x^2-2x+2)e^x - 2,\ x \geq 0$. Είναι

$\varphi'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2e^x > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $\varphi \nearrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(0) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2f(x) - x - 2 \geq 0$.

δ) Επειδή υπάρχουν τιμές του $x \in [0,+\infty)$ για τις οποίες δεν ισχύει η ισότητα στη σχέση

$2f(x) - x - 2 \geq 0$, έχουμε: $\int_2^4 \left[2f(x) - x - 2\right] > 0 \Leftrightarrow 2\int_2^4 f(x)dx - \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_2^4 - \left[2x\right]_2^4 > 0 \Leftrightarrow$

$2\int_2^3 f(x)dx - (8-2) - 8 + 4 > 0 \Leftrightarrow 2\int_2^4 f(x)dx > 10 \Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx > 5$

ε) $g(x) = \sqrt{x}f(\sqrt{x}) + 1 = \cancel{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\cancel{\sqrt{x}}} + 1 = e^{\sqrt{x}}$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$.

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \Rightarrow x = u^2$ και $dx = 2udu$. Για $x = 1$ είναι $u = 1$ και για $x = 4$ είναι $u = 2$.

Είναι $E = \int_1^2 e^u 2udu = \int_1^2 2u(e^u)'du = \left[2ue^u\right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du \Leftrightarrow$

$E = 4e^2 - 2e - 2\left[e^u\right]_1^2 = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) = 2e^2$.

σημείωμα για υποψηφίους

Φίλοι μαθητές.
Μην περιμένετε από τις όποιες υποδείξεις ,μεθόδους και κόλπα να μάθετε, αν δεν διαβάσετε την αντίστοιχη θεωρία και δεν την εμπεδώσετε. Προσοχή λοιπόν στην μελέτη του 1^ου^ κεφαλαίου
Όχι απλοί θεατές, αλλά πρωταγωνιστές !

Τα μαθηματικά θέλουν γνώση και ...φαντασία. Η φαντασία είναι έμφυτη, η γνώση και η τακτική αποκτιέται.

Α. ...λίγο πριν λύσουμε μια άσκηση ας έχουμε υπόψη τα εξής

Μια άσκηση μαθηματικών λύνεται εφόσον έχουμε τις απαραίτητες γνώσεις, το θάρρος και την ικανότητα **να δημιουργούμε** μόνοι μας την λύση της. Αυτή **η ικανότητα δεν είναι έμφυτη…**

- **αφήνουμε** τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης να μας οδηγήσουν.
- **ερμηνεύουμε** σωστά τα δεδομένα και τα ζητούμενα
- **συσχετίζουμε** τα δεδομένα και τα ζητούμενα με τις γνώσεις τις οποίες έχουμε.
- **εφαρμόζουμε** διάφορες τεχνικές, αρκεί αυτές να συμφωνούν με τη λογική μας.
- **ελέγχουμε** τα αποτελέσματα. Είναι φυσικό να κάνουμε κάποια λάθη τα οποία πρέπει να **αναζητάμε** και να τα **διορθώνουμε**.
- **Προσέχουμε** κάποια κρυφά σημεία των δεδομένων – ζητούμενων.
- Σε καμιά περίπτωση **δεν δεχόμαστε** ότι δεν μπορούμε να λύσουμε την άσκηση.

Β. Για να λύσουμε μια άσκηση:

- **Πολλοί λένε: "Από πού να αρχίσω;" Μα φυσικά από αυτά που ζητάς.**
  Ζητάς έναν αριθμό; Βάφτισε τον x. Ζητάς ένα σημείο; Βάφτισε το $M(x_o,y_o)$, ζητάς μία ευθεία; Βάφτισε την $y=\lambda x+\beta$ κ.λ.π.

- **Ανακαλύψτε τα δεδομένα της άσκησης που δεν φαίνονται με την πρώτη ματιά.**

  α. Εντοπίζουμε σε ποιο θεώρημα...κολλάει. Όλες οι ασκήσεις αναφέρονται κάπου. Εντόπισε το.

  β. Ελέγχουμε αν η ζητούμενη πρόταση μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη της !

  γ. Εργαζόμαστε στην υπόθεση και στο συμπέρασμα και καταλήγουμε σε ίδιο αποτέλεσμα.

  δ. Μετασχηματίζουμε την πρόταση που μας ζητούν και καταλήγουμε σε πρόταση που ισχύει.

  ε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει και καταλήγουμε σε άτοπο.

  στ. Μήπως στηρίζεται στο προηγούμενο ερώτημα;

  ζ. **Ζωγραφίζουμε** τα δεδομένα αν είναι δυνατόν.

Καλή επιτυχία.

Υ Γ

Θα είναι χαρά μας να μας υποδείξετε τα όποια λάθη στα βιβλιομαθήματα και να κάνετε τις όποιες παρατηρήσεις - υποδείξεις σχετικά με την προετοιμασία σας ή ότι άλλο εσείς νομίζετε .

Βαγγέλης Α Νικολακάκης

vagnik53@gmail.com