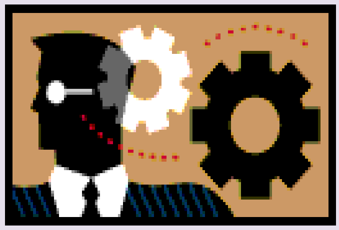
Βαγγέλης Νικολακάκης

μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

προσανατολισμού



Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

βιβλιομάθημα 2ο
- παράγωγοι -

2023

- ερωτήσεις θεωρίας με όλες τις αποδείξεις
- ερωτήσεις Σ-Λ
- συνοπτική μεθοδολογία (με παραπομπές σε ασκήσεις)
- θέματα προσομοίωσης επιπέδου εξετάσεων

έκδοση 3η

η επανάληψη μου - 2

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Αντί Προλόγου

- **Το παρόν βιβλίο αφορά την δεύτερη επανάληψη στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου (Παράγωγοι - Κεφάλαιο 2)**
- **Όλο τα έργο αποτελείται από 4 Βιβλιομαθήματα , όπου :**

☞ **οι επαναλήψεις 1 – 3 έχουν την δομή του παρόντος βιβλίου και αφορούν τα αντίστοιχα κεφάλαια του σχολικού βιβλίου .**

☞ **η επανάληψη 4 έχει διάρθρωση με θέματα Α – Β – Γ – Δ και διαγωνίσματα , όλα επιπέδου Πανελλαδικών Εξετάσεων .**

- **Φιλοδοξία μας δε είναι**

οι μαθητές Γ Λυκείου να πορευτούν με απόλυτη επιτυχία στις Πανελλαδικές και την εισαγωγή τους σε σχολή της αρεσκείας τους .

Βαγγέλης Α Νικολακάκης
ΑΘΗΝΑ
Κιν 6937020032

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Για την γρήγορη εύρεση των περιεχομένων ,κλικάρετε δεξιά και μεταβαίνετε στην αντίστοιχη σελίδα.

ΠΩΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. **Διαβάζουμε ότι έχουμε διδαχθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο.**
2. **Μελετούμε πολύ προσεκτικά τις ερωτήσεις και τις αποδείξεις πού υπάρχουν στο παρόν επαναληπτικό βιβλίο (Κεφάλαιο – 1) .Οι ερωτήσεις που έχουν σκιαγραφηθεί ,είναι SOS αποδείξεις για τις εξετάσεις !**
3. **Ελέγχουμε τις γνώσεις μας στην θεωρία απαντώντας στις ερωτήσεις Σ-Λ , (ενότητα Β). Στην συνέχεια ελέγχουμε την ορθότητα των απαντήσεων μας στην ενότητα Β-α (σελίδα 24)**
4. **Μελετούμε πολύ καλά τις μεθόδους και τις ασκήσεις για εμπέδωση τους στο κεφάλαιο 2 (σελίδες 25-69)**
5. **Κάνουμε εξάσκηση στα ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ του 3ου κεφαλαίου (σελίδα 79 και αφορούν μαθητές προχωρημένου επιπέδου που στοχεύουν υψηλές βαθμολογίες) . Στην συνέχεια ελέγχουμε την ορθότητα των λύσεων μας στην ενότητα Β (σελίδες 79 – 113)**

Καλή σας Επιτυχία !

Το παρόν βιβλίο προσφέρεται ΔΩΡΕΑΝ σε συναδέλφους ,μαθητές Γ ΛΥΚΕΙΟΥ και υποψηφίους και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έχει (χωρίς τροποποιήσεις)
Σε κάθε περίπτωση απαγορεύεται η εμπορική χρήση του από τρίτους , η ανάρτηση του στο Internet κλπ.

1 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ-ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Α ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ θεωρίας και τυπολόγιο ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Πως ορίζεται η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f ;

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ο πραγματικός αριθμός $f'(x_0)$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$.

Επομένως, η εξίσωση της **εφαπτομένης** στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 και τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 ;

- Μια συνάρτηση *f* λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.
- Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ-ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

α) Η ύπαρξη εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$,εξαρτάται από την ύπαρξη της παραγώγου $f'(x_0)$

β) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

γ) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της *f*, τότε:
Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και **είναι ίσα**.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σ'αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$,

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αρα , $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλια

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Ισχύει όμως ότι :

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ;

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *A*. Θα λέμε ότι:

— Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *A* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

— Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R.$$

5. Τι είναι η παράγωγος συνάρτηση ;

Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού *A* και A_1 το σύνολο των σημείων του *A* στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$f' : A_1 \to R$, ωστε : $x \to f'(x)$ η οποία ονομάζεται **παράγωγος της *f***.

6. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x ;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$

7. Πως παραγωγίζεται μια σύνθετη συνάρτηση ;

Αν η συνάρτηση *g* είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\mathbf{(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$

8. Να γράψετε τους τύπους παραγώγων των συναρτήσεων και τα σύνολα που ορίζονται

α. $f(x)=c$ β. $f(x)=x$ γ. $f(x)=x^{\nu}$ δ. $f(x)=\frac{1}{x^{\nu}}$ ε. $f(x)=\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$ ε. $f(x)=\sqrt{x}$

στ. $f(x)=\eta\mu x$ ζ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ η. $f(x)=\varepsilon\varphi x$ θ. $f(x)=\sigma\varphi x$ ι. $f(x)=e^{x}$ κ. $f(x)=\ln x$

α. $f'(x)=0$,$x\in R$ β. $f'(x)=1$,$x\in R$ γ. $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$,$x\in R$

δ. $f(x)=\frac{1}{x^{\nu}}=x^{-\nu}\Rightarrow f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$,$x\in R$ ε. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$x\in(0,+\infty)$ στ. $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$,$x\in R$

ζ. $f'(x)=-\eta\mu x$,$x\in R$ η. $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$,$x\in R\text{-}\left\{x\,/\,x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

θ. $f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^{2}x}$,$x\in R\text{-}\{x\,/\,x=\kappa\pi\}$

ι. $f'(x)=e^{x}$,$x\in R$ κ. $f'(x)=\frac{1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$

9. **Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$,$c\in R$,. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$**

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

10. **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.**

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

11. **Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in R-\{0,1\}$. Δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$**

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$ οπότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},\quad \text{δηλαδή } (x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}.$$

12 . Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

Οπότε $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\qquad \text{δηλαδή } \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.\qquad \text{Δηλαδή, } (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x.$$

13. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

<u>Απόδειξη</u>

Για $x\neq x_0$,ισχύει: $$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu},\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, για κάθε $x\in R^*$ έχουμε: $$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu>1$. Επομένως, αν $\kappa\in N-\{0,\ 1\}$, τότε : $\boldsymbol{(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}}$.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο f και ισχύει $D_f=R-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή : $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

16. Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Q$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και σχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

δηλαδή $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

17. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$f'(x) = \alpha^{x} \ln\alpha$,

δηλαδή: $(\alpha^{x})' = \alpha^{x} \ln\alpha$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = \alpha^{x} = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^{x} \ln\alpha.$$

18. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^{*}$ είναι παρ/μη στο R^{*} και ισχύει

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Απόδειξη

Πράγματι : αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ αν $x < 0$, τότε :

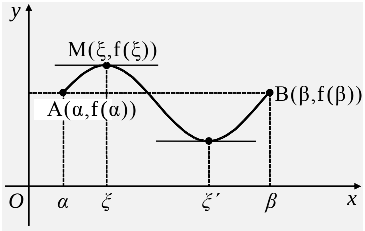
$\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

19. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

20. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle

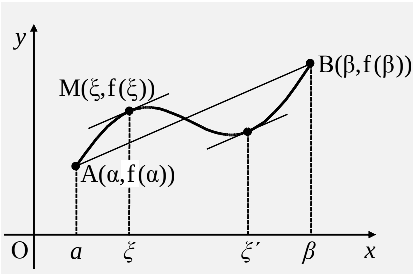


Το Θ.R. γεωμετρικά, σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των *x*.

21. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι: συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

22. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής



Γεωμετρικά, το ΘΜΤ σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*.

23. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1) Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε , λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

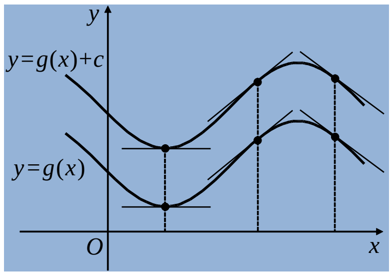
24. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



25. σημαντική πρόταση

(**δεν θέλει απόδειξη – ως εφαρμογή σχολικού)**

Αν για μια συνάρτηση *f* ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$,

τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in R$.

- $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$
- $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$
- $f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = ce^x$

26. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι *γν. αύξουσα* σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γν. φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

27. Τι ονομάζουμε τοπικό μέγιστο και τι τοπικό ελάχιστο της f ;

- Μια συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της *f*.

- Μία συνάρτηση *f*, με πεδίο ορισμού *A*, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της *f*.

• Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

• Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

•Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και έχει ένα τοπικό ακρότατο ,τότε θα είναι και ολικό.

28. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $Δ$ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του $Δ$. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

29. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f ;

• Τα εσωτερικά σημεία του $Δ$ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
• Τα εσωτερικά σημεία του $Δ$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
• Τα άκρα του $Δ$ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).
Τα εσωτερικά σημεία του $Δ$ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα** σημεία της f στο διάστημα $Δ$.

30. Τι γνωρίζετε για την παράγωγο συνάρτησης στο σημείο που παρουσιάζει ακρότατο ;

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $Δ$ και x_0 εσωτερικό σημείο του $Δ$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

31. Πως σχετίζεται το πρόσημο της f΄ με τα τοπικά ακρότατα;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.
Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπ. μέγιστο της f.
Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπ. ελάχιστο της f.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

32. Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη σ' ένα διάστημα $Δ$ και $\mathbf{x_0}$ εσωτερικό σημείο του $Δ$. Αν η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\mathbf{x_0}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε: $\mathbf{f'(x_0)=0}$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $Δ$ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \varDelta$ και $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$. (3) Έτσι , από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

33. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα

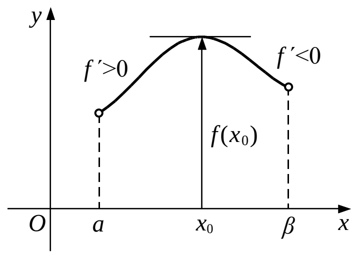
Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

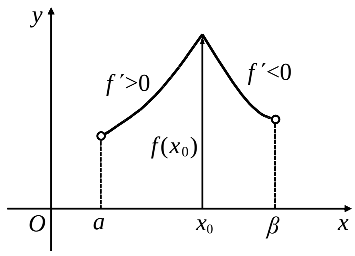
- **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
- **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
- **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

34. Η συνάρτηση Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

<u>Απόδειξη</u>

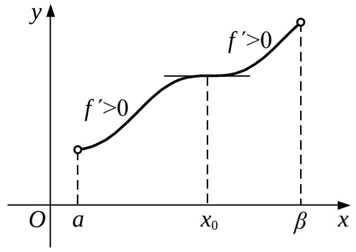
i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1) Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

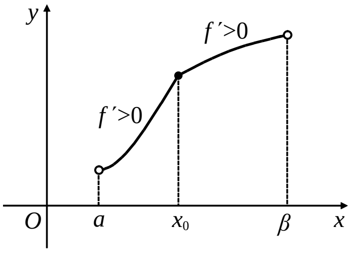




Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

35. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται κυρτή ή κοίλη ;

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

36. Πως σχετίζεται το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου με την κυρτότητα ;

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

37. Τι ονομάζουμε σημείο καμπής της γραφ. Παράστασης μιας συνάρτησης ;

Έστω μια συνάρτηση *f* παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η *f* είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της *f*.

38. Πως σχετίζεται η f΄΄ με το σημείο καμπής ;

- Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.
- Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$, τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Η συνθήκη $f''(x_0)=0$ δεν μας εξασφαλίζει κατ΄ανάγκη ,ότι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$,είναι Σ.Κ.
Θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .

39. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής ;

Οι *π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς σ η μ ε ί ω ν κ α μ π ή ς* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα *Δ* είναι:

i)Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f'' μηδενίζεται .

ii)Τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία δεν υπάρχει η f''

40. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γ.π. της f ;

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της *f*.

41. Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γ.π. της f ;

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

42. Τι ονομάζουμε ασύμπτωτη (πλάγια) της γ.π. της f ;

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ και στο $-\infty$ αν $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

Η συνθήκη $f''(x_0)=0$ δεν μας εξασφαλίζει κατ΄ανάγκη ,ότι το σημείο $A(x_0,f(x_0))$,είναι Σ.Κ.
Θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .

43. Να γράψετε τους τύπους ,με τους οποίους βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y=\alpha x+\beta$

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in R,$$

αντιστοίχως :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in R .$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$

44. Ποιοι είναι οι κανόνες De l΄ Hospital ;

1ος Κανόνας

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in \mathrm{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2ος Κανόνας

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in \mathrm{R}\cup\{-\infty,\ +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

45. Σημαντικές ανισοεξισώσεις στις παραγώγους (τα Β-Γ-Δ-Εθέλουν απόδειξη)

Α. για κάθε $x>0$ $\quad \ln x\le x-1$ και $\ln x = x-1 \Leftrightarrow x=1$

Β. για κάθε $x\in \mathrm{R}$ $\quad e^x\ge x+1$ και $e^x=x+1\Leftrightarrow x=0$

Γ. για κάθε $x\in \mathrm{R}$ $\quad e^x\ge x+1>x\Rightarrow e^x>x$

Δ. για κάθε $x>0$ $\quad e^x>x>\eta\mu x$

Ε. για κάθε $x>0$ $\quad e^x>x>x-1\ge \ln x\Rightarrow e^x>\ln x$

Β. θέτω στο Α όπου x το e οπότε $\ln e^x\le e^x-1\Rightarrow x\le e^x-1\Rightarrow e^x\ge x+1$

Γ. είναι συνέπεια του Β

Δ. είναι συνέπεια του Β και το $x\ge \eta\mu x$ προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $|\eta\mu x|\le x$ του σχολ. για $x>0$ /

Ε. είναι συνέπεια του Β

ΟΡΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Οι ερωτήσεις με κόκκινη αρίθμιση θέλουν περισσότερη προσοχή γιατί δεν είναι άμεσες συνέπειες του σχολικού βιβλίου

1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός .

2. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικοί αριθμοί. .

3. Αν f , g : Δ → R, Δ διάστημα και $x_0 \in \Delta$ ώστε οι συναρτήσεις f, g να μην είναι παραγωγίσιμες στο x_0 ,τότε η f + g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

5. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f΄ είναι πάντα συνεχής στο σημείο αυτό.

7. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

8. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f πάντοτε δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

9. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f΄ είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

10. Αν η f: R→R είναι άρτια και παραγωγίσιμη τότε η f΄ είναι περιττή.

11. Αν η f: R→R είναι περιττή και παραγωγίσιμη τότε η f΄ είναι άρτια.

12. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

13. Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ – ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

2. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτόμενη της f στο x_0 είναι παράλληλη στον x΄x.

3. Αν η f δέχεται στο x_0 εφαπτόμενη τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f΄(x_0)=0$, τότε η εξίσωση της οριζόντιας εφαπτομένης της Cf στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η y=0

5. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την Cf.

Θ. ROLLE

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε η συνάρτηση f είναι 1-1 στο [α, β].

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α ,β] με f(α) = f(β) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f΄(x_0) = 0$ ή η f δεν παραγωγίζεται στο (α, β).

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με f(α) = f(β) , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

5. Έστω η συνάρτηση f: [α ,β] → [α ,β] που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β] , τότε και η συνάρτηση g(x) = (fof)(x) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β].

6. Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα Α = [α, β] να ισχύουν το Θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f.

7. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, τότε η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μια ρίζα στο [α, β].

8. Αν f παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο [α, β] με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ τότε f(α) ≠ f(β).

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι 1 – 1 στο διάστημα [α, β] τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα xx΄.

Θ.Μ.Τ. - ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

1. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής εφαρμόζεται για την f στο διάστημα [α, β] μόνο όταν η f΄ είναι γνησίως μονότονη στο [α, β]

2. Αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο [α, β] τότε $f'(\beta) < \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} < f'(\alpha)$

3. Αν για κάποιο ξ∈(α, β) είναι f΄(ξ) > 0 τότε $\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} > 0$

4. Το Θ.Μ.Τ. απαιτεί από την συνάρτηση περισσότερες συνθήκες από το Θεώρημα Rolle.

5. Αν f παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο [α, β] με f(α) ≠ f(β) ,τότε $f'(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in (\alpha,\beta)$

6. Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β] δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, τότε δεν υπάρχει σημείο ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$

7. Η f είναι συνεχής στο R. Αν δεν υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ όπου Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο ξ∈R.

8. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R και f(α) > f(β) για κάποια α, β∈R με α < β, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x.

9. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β] είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)).

10. Αν f, g παραγωγίσιμες στο (α, β) με f΄(x) = g΄(x) για κάθε x∈(α, β) τότε ισχύει f(x) = g(x), για κάθε x∈(α, β).

11. Αν f(x) = g(x) για κάθε x∈(α, β) και f παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει f΄(x) = g΄(x), για κάθε x∈(α, β).

12. Αν f, g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και f΄(x) = g΄(x), για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) + c, για κάθε $x \in \Delta$, όπου $c \in R$ μια σταθερά

13. Αν f, g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και f΄(x) = g΄(x), για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι πάντοτε σταθερές συναρτήσεις στο Δ.

14. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

15. Αν η f είναι ορισμένη στο R και f΄(x) = 0 για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, τότε η f είναι σταθερή στο R.

16. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(x) = 0 για κάθε x∈R, τότε η f είναι σταθερή στο R.

17. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο R με f΄(x) - g΄(x) =0 για κάθε x∈R και οι C_f ,C_g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

18. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα [α, β] με f(α) = g(α) και f(β) = g(β), τότε υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ ώστε στα σημεία Α(x_0, f(x_0)) και Β(x_0, g(x_0)) οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε ισχύει f΄(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής και f΄(x) > 0 στο (α, x_0) και f΄(x) < 0 στο (x_0, β) τότε το f(x_0) είναι τοπικό ελάχιστο της f.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής και f΄(x) > 0 στο (α, x_0) και f΄(x) < 0 στο (x_0, β) τότε το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f.

5. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f΄(x) διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0) ∪ (x_0, β), τότε το f(x_0) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

6. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, x_0) ∪ (x_0, β), συνεχής στο σημείο x_0 και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε η f΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

8. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in$ [α, β] στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο τότε πάντα ισχύει $f'(x_0) = 0$.

9. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο άκρο α, τότε δε συνεπάγεται πάντα ότι f΄(α) = 0.

10. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in$ (α, β), τότε ισχύει πάντα ότι $f΄(x_0) = 0$.

11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in$ (α, β), τότε η f έχει ολικά ακρότατα τα f(α) και f(β).

12. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ, στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη

13. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό μέγιστο

14. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

15. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

16. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο της συνάρτησης.

17. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f΄ είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

18. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f, τότε το x_0 είναι πάντοτε θέση τοπικού ακρότατου της f.

19. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in$ (α, β), τότε η f δεν έχει ακρότατα στο (α, β).

20. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in$ (α, β), τότε τα ακρότατα της f είναι τα f(α) και f(β).

21. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in$ (α, β) και η f΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε αυτό είναι πάντοτε θέση τοπικού ακροτάτου.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

εκτός ύλης

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 και η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως τότε το σημείο Μ(x_0, f(x_0)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως είναι συνεχής και έχει εφαπτομένη και η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως τότε το σημείο Μ(x_0, f(x_0)) είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

3. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό τουΔ με $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

8. Αν η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή στο (α, x_0] και κοίλη στο [x_0, β) τότε παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0.

9. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής στο ίδιο x_0.

10. Αν η f είναι πολυωνυμική και παρουσιάζει δύο σημεία καμπής τότε είναι τουλάχιστον 4ου βαθμού.

11. Στο σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

12. Αν η f είναι ορισμένη και κυρτή στο R τότε κάθε ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική της παράσταση σε δύο το πολύ σημεία.

13. Αν η f είναι ορισμένη και στρέφει τα κοίλα άνω στο R με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τότε η f μπορεί να παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

14. Αν η f είναι κοίλη και γνησίως φθίνουσα στο R τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

15. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και στρέφει τα κοίλα κάτω στο R τότε f΄΄(x)<0 για κάθε $x \in R$

16. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τότε οι γραφικές παραστάσεις των f, f΄ δεν μπορούν να έχουν σημείο καμπής με την ίδια τετμημένη.

17. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ ,τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

<u>Α ΣΥΜΠΤΩΤΕΣ</u>

στα ερωτήματα με τις ασύμπτωτες θεωρούμε ότι το ΠΟ περιέχει διαστήματα της μορφής

- $(-\infty, \alpha)$ ή $(\beta, +\infty)$ αν αναφερόμαστε σε ΟΑ ή ΠΑ
- $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή $(\beta, +\infty)$ αν

1. Κάθε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της f δεν έχει σημεία τομής με την f.

2. Η ύπαρξη οριζόντιας ασύμπτωτης αποκλείει την ύπαρξη πλάγιας.

3. Η ύπαρξη κατακόρυφης ασύμπτωτης αποκλείει την ύπαρξη οριζόντιας.

4. Κάθε συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ μία πλάγια ασύμπτωτη.

5. Κάθε συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ μία κατακόρυφη ασύμπτωτη.

6. Κάθε συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ μία οριζόντια ασύμπτωτη

7. Υπάρχει συνάρτηση που έχει και τα τρία είδη ασύμπτωτων

8. Μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού τουλάχιστον δύο δεν έχει ασύμπτωτες

9. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή κατά δύο μεγαλύτερο από τον βαθμό παρονομαστή δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

10. Κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό αριθμητή ίσο με τον βαθμό του παρονομαστή έχει ασύμπτωτη.

11. Κάθε ρητή με βαθμό αριθμητή κατά ένα μεγαλύτερο από τον βαθμό παρονομαστή έχει πλάγια ασύμπτωτη και στο +∞ και στο -∞.

12. Κάθε ρητή συνάρτηση με παρονομαστή δευτέρου βαθμού που έχει θετική διακρίνουσα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

13. Υπάρχει ρητή συνάρτηση που έχει μόνο μία κατακόρυφη και μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ

1. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι $1-1$,τότε και η f' είναι $1-1$

2. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε μπορεί η ευθεία $x=x_0$ να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει $\left[f\left(f(x)\right)\right]' = \left[f'(x)\right]^2$

4. Έστω $f''(x)=(x-2017)^2$.Τότε η f έχει σημείο καμπής στο $x_o = 2017$

5. Μια πολυωνυμική συνάρτηση $4^{ου}$ βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.

6. Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0.

7. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

8. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

9. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f με $f'(x)>0$ για $2<x<7$. Αν $f(3)=5$, τότε μπορεί να ισχύει $f(5)=4$.

10. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o-h)-f(x_o)}{h}$

11. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=+\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

12. Έστω f παραγωγίσιμη στο [α, β] με f(β) < f(α), τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) < 0$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x_o \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) - f(x_o) = f'(\xi)(x - x_o)$.

14. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 2017$ τότε ισχύει $f'(2017) = \left[f(2017)\right]'$

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α) = f(β) και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε η εξίσωση $f'(x)= 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β).

16. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο [α, β] για τις οποίες ισχύει f(α)=g(α) και f(β) = g(β), τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία τους $A\left(x_o, f(x_o)\right)$ και $B\left(x_o, g(x_o)\right)$ αντίστοιχα ,να είναι παράλληλες.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Ορισμός παραγώγου	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ								
Εφαπτομένη	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ																
Θ. Rolle	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ												
Θ.Μ.Τ.	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ			
Μονοτονία ακρότατα	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ
Κυρτότητα σ. καμπής	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ				
Ασύμπτωτη	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ								
Συνδιαστικές	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ					

2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ...στα γρήγορα
...και ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ...για εμπέδωση της

Α ΜΕΘΟΔΟΙ - ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, εκτός – ίσως – από αυτές που έχουν στον τύπο τους κλάδους ,ρίζες ή απόλυτες τιμές. Σε αυτές ελέγχουμε με τον ορισμό.

2. Οι παραγωγίσιμες είναι και συνεχείς, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα.Δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, η f δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0

3. Όταν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε **προκύπτουν 2 όρια** !

$$f'(x_0) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = L$$

4. • Για να παραγωγίζεται μια συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής.Αν όμως είναι συνεχής ,αυτό δεν μας εξασφαλίζει ότι είναι και παραγωγίσιμη !
• Μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Μία συνάρτηση που δεν είναι συνεχής στο x_0 ,τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

5. **Όταν έχουμε, δοσμένη συναρτησιακή σχέση** πχ $f^3(x)+f(x)=\eta\mu x$

- αν έχουμε γνωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,τότε η εύρεση του $f'(x_0)$ γίνεται με τον ορισμό ,κάνοντας πράξεις στην δοσμένη σχέση.
- αν έχουμε γνωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R τότε παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση.

6. Σε πολλές ασκήσεις εμφανίζεται η παράσταση $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. Πιθανά να είναι η f '(0) !

Ελέγχουμε μήπως δίνεται ότι $f(0)=0$,οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

7. Αν πρόκειται να βρείτε παράγωγο άρρητης παράστασης με πεδίο ορισμού το R, ο κλασματικός εκθέτης πιθανόν να σας δημιουργήσει πρόβλημα: Προτιμήστε να κάνετε τη συνάρτηση δίκλαδη και να πάρετε την παράγωγο του κάθε κλάδου χωριστά .

πχ: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{|x|^2}=|x|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} & ,x\geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}} & ,x<0 \end{cases}$ και να θυμόμαστε $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$

8. Η εφαπτομένη μιας καμπύλης f υπάρχει αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o. Συνηθίστε να γράφετε την εξίσωση της εφαπτομένης στη μορφή:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Πολλές ασκήσεις λύνονται ζητώντας την ταύτιση της εφ/νης με δεδομένη ευθεία. Μην ξεχνάτε ότι το σύστημα μιας καμπύλης f με την εφ/νη της έχει τουλάχιστον μια λύση x_0 που είναι το σημείο επαφής.

9. Ας δούμε όμως κι άλλες συμβουλές στην εφαπτόμενη !

↳ Δύο συναρτήσεις f και g έχουν **κοινή εφαπτομένη** στο x_o αν

$f(x_o)=g(x_o)$ και $f'(x_o)=g'(x_o)$.

↳ Δύο συναρτήσεις εφάπτονται στο x_o, αν έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_o.

↳ Αν η ευθεία ε: y=λx+β είναι εφαπτομένη της f στο σημείο $M(x_o,f(x_o))$, τότε $λ=f'(x_o)$ και $f(x_o)=λx_o+β$, αφού το M ανήκει και στην συνάρτηση και στην εφαπτομένη.

10. **Ρυθμός μεταβολής ισχύει ότι , ο $PM=f'(x_0)$**

↳ Αν η άσκηση στηρίζεται σε θέματα από τη Φυσική ή Γεωμετρία κλπ ,τότε μετατρέπουμε τον τύπο σε συνάρτηση του χρόνου π.χ. V=2πρυ σε V(t)=2πρυ(t)

↳ Αν η άσκηση στηρίζεται σε συνάρτηση την "φυτεύουμε" σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

↳ Ότι κινείται στον άξονα x'x το ονομάζουμε x(t) και στον y'y το ονομάζουμε y(t). Η ταχύτητα τους (ή ο ρυθμός μεταβολής) θα είναι x'(t) και y'(t).

↳ Ο τύπος της συνάρτησης δημιουργείται από αυτό που κινείται και αυτό που υφίσταται τις συνέπειες και τις μεταβολές.

11. **πονηρά σημεία απ΄τα οποία προκύπτει η εφαρμογή του Θ. Rolle**

↳ μας το ζητούν

↳ η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την f (προσοχή ! αν δεν προκύψει λύση ,εξετάζουμε για Θ. Bolzano για f')

↳ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα

• εξετάζουμε αν λύνεται με Θ. Bolzano ,αν όχι

• $f(x)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow g'(x)=0$,οπότε εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $g(x)$

↳ υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0)=0$

↳ θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον χχ'.

↳ Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$ σηματοδοτεί την εφαρμογή του **Θ. Rolle στο** $[\alpha,\beta]$.

↳ στην άσκηση προκύπτει ότι x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Τότε έχουμε $f(x_1)=f(x_2)=0$ και εφαρμόζουμε Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]$.

12. Εκτός από τις δύο προφανείς περιπτώσεις, το θεώρημα Rolle εφαρμόζεται και όταν:

↳ Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ρίζα σε μια εξίσωση. Βρίσκουμε την αρχική της εξίσωσης και κάνουμε Θ.R γιαυτήν .

↳ Αν μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει «το πολύ κ ρίζες». Υποθέτουμε ότι υπάρχουν (κ+1) ρίζες και κάνουμε διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος μέχρι να φθάσουμε σε άτοπο.

↳ Επίσης, εκφράσεις του τύπου : Δείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών μιας συνάρτησης υπάρχει ρίζα της παραγώγου της, παραπέμπει σε εφαρμογή του θεωρήματος Rolle.

13. Για την εύρεση τύπου συνάρτησης προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ισότητα που έχει μια από τις παρακάτω μορφές)συνέπειες ΘΜΤ) :

- $\mathbf{f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c}$
- $\mathbf{f'(x)=g'(x) \Rightarrow f(x)=g(x)+c}$
- $\mathbf{f'(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=ce^{x}}$

14 σημαντικοί τύποι στην εύρεση τύπου συνάρτησης , όταν δίνονται ΔΕ εξισώσεις της μορφής $\Pi(f,f',f'')=0$

↳ αν δίνεται $f(x)+f'(x)=c \to$ πολ/ζω με e^{x} και έχω $\left(e^{x}f(x)\right)'=(...)'$

↳ αν δίνεται $f(x)-f'(x)=c \to$ πολ/ζω με e^{-x} και έχω $\left(e^{-x}f(x)\right)'=(...)'$

↳ αν δίνεται $f(x)+g(x)f'(x)=c \to$ πολ/ζω με $e^{h(x)}$,όπου $h(x)$ αρχική της g.

Δηλαδή $h'(x)=g(x)$ και έχω $\left(e^{h(x)}f(x)\right)'=(...)'$

↳ αν δίνεται $f''(x)=f(x) \to$ προσθέτω το $f'(x)$ και έχω $f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)$,

στην συνέχεια δε πολ/ζω με e^{x} και προκύπτει… $\left(e^{x}f'(x)\right)'=\left(e^{x}f(x)\right)'$…..

↳ αν δίνεται $f''(x)\cdot f(x)+2\left(f'(x)\right)^{2}=0 \to$ πολ/ζω με $f(x)$ και προκύπτει

$$\ldots\left(f'(x)\cdot f^{2}(x)\right)'=0$$

15 Το θεώρημα Μέσης Τιμής (**ΘΜΤ**) μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλες τις περιπτώσεις που έχουμε συνάρτηση **συνεχή** και **παραγωγίσιμη** και στο διάστημα που εμείς επιλέγουμε.

↳ Αν για μια συνάρτηση γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου της , τότε η εφαρμογή του ΘΜΤ οδηγεί σε διπλή ανίσωση.

↳ Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1.\xi_2 \in (\alpha,\beta)$,ώστε $\kappa f'(\xi_1)+\lambda f'(\xi_2)=0$

τότε πρέπει να σπάσουμε το $[\alpha,\beta]$ σε κατάλληλα υποδιαστήματα .

↳ Αν σε προηγούμενο ερώτημα έχουμε δείξει ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε….

Τότε συνήθως σπάζουμε το $[\alpha,\beta]$ στα υποδιαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$.

↳ Σε πολλές περιπτώσεις απόδειξης ανισοτήτων της μορφής $\Pi(f,f')>0$,εργαζόμαστε με ΘΜΤ σε διαστήματα της μορφής $[x-1,x]$, $[x,x+1]$ κλπ.

Στην περίπτωση αυτή εκφράζουμε την συνάρτηση με την βοήθεια άλλης μεταβλητής π.χ. $f(t)=t\ln t+1$

↳ Σε εξισώσεις που έχουν μορφή $\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x$,όπου $\alpha<\beta<\gamma<\delta$,τότε θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)=t^x$ και εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα $(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)$.

↳ Σε περιπτώσεις απλών ανισώσεων η ακόμα και ΄΄απόγνωσης΄΄ που έχουμε δοκιμάσει διάφορα ,δεν μας κοστίζει τίποτα να δοκιμάσουμε και ΘΜΤ !

16 Στην εύρεση της **μονοτονίας** μιας συνάρτησης, εκτός της κλασσικής συνταγής (Βρίσκουμε την f΄, φτιάχνουμε πίνακα με το πρόσημο της) μπορεί να προκύψουν και οι παρακάτω «περίεργες» περιπτώσεις :

↳ μπορεί η f' να αποτελείται από δύο θετικά ή δύο αρνητικά τμήματα ,οπότε εύκολα προκύπτει το πρόσημο της . πχ $f'(x)=\underbrace{A(x)}_{(-)}+\underbrace{B(x)}_{(-)}<0$

↳ μπορεί η f' να αποτελείται από δύο τμήματα ,όπου το ένα έχει σταθερό πρόσημο και το άλλο μεταβλητό πρόσημο ,τότε θεωρούμε συνάρτηση το κομμάτι της παραγώγου που δεν έχει σταθερό πρόσημο και βρίσκουμε το σύνολο τιμών της. Θα δούμε είτε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο κάποιο αρνητικό αριθμό ή ελάχιστο κάποιο θετικό αριθμό, οπότε θα βρούμε το πρόσημό της.

πχ $f'(x)=\underbrace{A(x)\cdot B(x)}_{(-)}\cdot\Gamma(x)$,θεωρούμε $g(x)=\Gamma(x)$ οπότε βρίσκουμε το πρόσημο της $g(x)$ με : μονοτονία $g(x)$ και $g(x_0)=0$ ή με το ΣΤ της $g(x)$

↳ Βρίσκουμε την παράγωγο, **υπάρχει προφανής ρίζα της**, αλλά δεν μπορούμε να λύσουμε την ανίσωση ή να βρούμε πρόσημο. Τότε ή θα βρούμε τη $2^{η}$ παράγωγο ή θα θεωρήσουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο το τμήμα της f΄ για το οποίο δεν γνωρίζουμε σίγουρα το πρόσημο. Για την καινούργια συνάρτηση, πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών της

↳ Βρίσκουμε την παράγωγο, αλλά δεν υπάρχει ούτε σταθερό πρόσημο ούτε σημείο μηδενισμού της.Ονομάζουμε συνάρτηση το κομμάτι της παραγώγου που δεν έχει σταθερό πρόσημο και βρίσκουμε το σύνολο τιμών αυτής. Θα δούμε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο κάποιο αρνητικό αριθμό ή ελάχιστο κάποιο θετικό αριθμό, οπότε θα έχουμε βρει το πρόσημό της.

17 Πως βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης $g(x)$

Είδαμε παραπάνω ότι η εύρεση προσήμου παράστασης είναι πολύ σημαντική στην μελέτη μονοτονίας συνάρτησης.Τό ίδιο σημαντική είναι επίσης στην απόδειξή ανισώσεων.
Δύο σημαντικά βήματα για να βρούμε το πρόσημο της $g(x)$ είναι να γνωρίζουμε την **μονοτονία** και την **ρίζα της** x_0 ,δηλαδή $g(x_0)=0$.Έτσι ενδεικτικά έχουμε

x	$+\infty$	x_0	$+\infty$
$g(x)$	□ $(+)$	0	□ $(+)$

• αν $x<x_0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x)>g(x_0) \Rightarrow g(x)>0$

• αν $x>x_0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(x_0) \Rightarrow g(x)>0$

Έτσι έχουμε $g(x)>0 \quad \forall x \neq x_0$

↳ ανάλογα βέβαια με την μονοτονία της g ,έχουμε διάφορες περιπτώσεις προσήμων .
↳ όπως είδαμε στο 16 , η εύρεση του ΣΤ της g μπορεί να μας δώσει (όχι πάντα !) το πρόσημό της .
- αν πχ $g(A)=(0,+\infty)$,τότε $g(x)>0$.
- αν πχ $g(A)=(-2,+\infty)$,τότε η $g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο .

↳ όταν γνωρίζουμε το πρόσημο της g ,τότε μπορούμε να λύσουμε ανίσωση .Έτσι
- αν πχ έχουμε $g(x)>0 \Leftrightarrow x \in R\text{-}\{x_0\}$.
- αν πχ έχουμε $g(x)\leq 0 \Leftrightarrow x=x_0$.

18 κρίσιμες ανισότητες που μας βοηθούν στην εύρεση του προσήμου της $f'(x)$.

↳ για κάθε $x \neq 0$ είναι $|ημx| \leq |x|$
↳ για κάθε $x>0$ $\ln x \leq x-1$ και $\ln x = x-1 \Leftrightarrow x=1$
↳ για κάθε $x>0$ $e^x > x > ημx$
↳ για κάθε $x>0$ $e^x > x > \ln x$

Δείτε τις αιτιολογήσεις στην σελίδα 45

19 Ειδικές συνθήκες (ερμηνεία – αντίδραση)

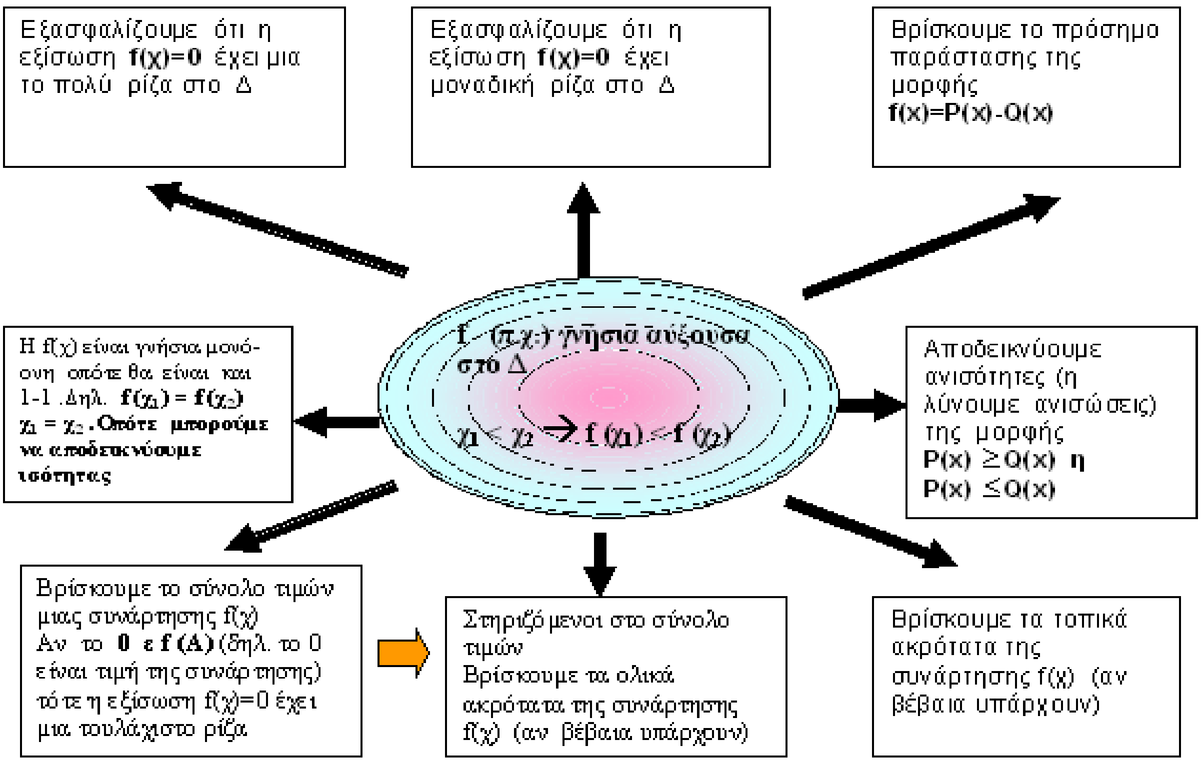
↳ Η συνθήκη $f'(x_o)=0$ σημαίνει:
- Το x_0 είναι ρίζα της παραγώγου
- Στο x_0 η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x'x.
- Στο x_0 έχουμε πιθανή θέση ακροτάτου.

↳ Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$ μας καθοδηγεί στην εφαρμογή Θ. Rolle στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$, $[\beta,\gamma]$ με συμπέρασμα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.Στην συνέχεια εφαρμόζουμε πάλι Θ. Rolle στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παίρνουμε συμπέρασμα για την f''.

20 **ζητείται η απόδειξη ανισότητας** $A(x) > B(x) \Leftrightarrow \underbrace{A(x) - B(x)}_{h(x)} > 0$

Γενικά μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^0 μέλος και εργαζόμαστε με :
μονοτονία ή **ολικά ακρότατα** ή **ΘΜΤ** ή **ΣΤ** ή **κυρτότητα και εφαπτόμενη**

21 **σημαντικές επιδράσεις της μονοτονίας**



22 **Δίνεται ανισοισότητα** $A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow \underbrace{A(x) - B(x)}_{h(x)} \geq \underbrace{0}_{h(x_0)} \Leftrightarrow h(x) \geq h(x_0)$

Άρα $h(x_0)$ ελάχιστο… → Θ. Fermat… → $h'(x_0) = 0$

23

- ακρότατο στο x_0 … → Θ. Fermat… → $f'(x_0) = 0$
- σημείο καμπής στο x_0 … → $f''(x_0) = 0$
- Θ. Fermat + ΘΕΜΤ … → $f'(x_0) = 0$

Γενικά το θεώρημα Fermat, το χρησιμοποιούμε όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη ακρότατου μιας συνάρτησης σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Υπενθυμίζουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, τότε παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν γνωρίζουμε ότι αυτές δεν εμφανίζονται στα άκρα του διαστήματος, τότε η f ΄ μηδενίζεται σε δύο εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

24 •Για να δείξουμε **ότι υπάρχει σημείο καμπής** μιας συνάρτησης, θα πρέπει
↳να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο στο οποίο να μηδενίζεται ή να μην ορίζεται η δεύτερη παράγωγος , καθώς και
↳ ότι η δεύτερη παράγωγος αλλάζει πρόσημο γύρω από εκείνο το σημείο.

• αν αντίθετα, θέλουμε να δείξουμε ότι **δεν υπάρχει σημείο καμπής**,μπορούμε να δείξουμε κάτι από τα παρακάτω:
↳ Αν η δεύτερη παράγωγος ορίζεται παντού, αρκεί να δείξουμε ότι δεν μηδενίζεται.
↳ Αν μηδενίζεται, δείχνουμε ότι δεν αλλάζει πρόσημο.

↳ Ας θυμηθούμε ότι αν η $2^{η}$ παράγωγος είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο , αρκεί η διακρίνουσά του να είναι αρνητική.

↳ Μπορούμε υποθέτοντας ότι υπάρχει σημείο μηδενισμού της $2^{ης}$ παραγώγου, να καταλήξουμε σε άτοπο χρησιμοποιώντας κάποιες από τις δοσμένες σχέσεις.

25 • Αν μια συνάρτηση f είναι ↑ και παραγωγίσιμη , γράφουμε ότι $f'(x)\geq 0$

• Αν μια συνάρτηση f είναι π.χ. κυρτή, γράφουμε ότι f' είναι ↑ή ότι $f''(x)\geq 0$ και

αν ε: $y=\lambda x+\beta$ η εφαπτόμενη της ,τότε $f(x)\geq \lambda x+\beta$

26 Αν θέλουμε να βρούμε **ασύμπτωτες** για μια συνάρτηση , τότε
↳ βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της.
↳ Από εκεί θα καταλάβουμε αν πρέπει να ψάξουμε για ασύμπτωτες και για το είδος τους.
↳ Στην περίπτωση που σας δίνουν έτοιμη την ασύμπτωτη μιας συνάρτησης, ουσιαστικά μας προσφέρουν τα αποτελέσματα κάποιων ορίων. Δηλαδή :

• αν $y=\lambda x+\beta$ ΠΑ στο $+\infty$,τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$

• αν $y=\beta$ ΟΑ στο $+\infty$,τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$

• αν $x=x_0$ ΚΑ στο ,τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$

27 Αν δίνεται μια συναρτησιακή ισότητα με την παραγωγίσιμη συνάρτηση **f** (πχ $f^3(x)+f(x)=xe^x$) τότε :

• δεν λύνουμε ποτέ ως προς $f(x)$

• συνήθως παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας ή με πράξεις εμφανίζουμε παραστάσεις ορίων .

• αν η δοσμένη σχέση είναι ανισότητα ,δεν παραγωγίζουμε ποτέ !

28. Αν δίνεται ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R και $f(R)=R$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

29. Όλα όσα πρέπει να γνωρίζουμε για τις εξισώσεις

Οι εξισώσεις που είχαμε διδαχθεί έως και Β Λυκείου επιλύονται με αλγεβρικούς τρόπους.
Για τον λόγο αυτό εξετάζουμε αν μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$ έχει αλγεβρική επίλυση ή προφανή λύση

Α. Η εξίσωση g(x)=κ να έχει ρίζα στο (α,β) ή στο R

Μία τουλάχιστον ρίζα

α) Μεταφέρω όλους τους ορούς της εξίσωσης στο πρώτο μέλος για να έχω εξίσωση της μορφής **f(χ)=0** Εξετάζω αν η συνάρτηση με τύπο **f(χ)** είναι συνεχής στο **[α,β]**. Υπολογίζω τα f(α),f(β) και εξετάζω αν **f(α).f(β)<0** τότε συμφωνά με το θεώρημα του **Bolzano** θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα **ξ** της εξίσωσης **f(χ)=0** στο **(α,β).**

β)Μερικές φορές που θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση **f(χ)=0** έχει ρίζα στο **(α,β)** δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία γιατί δεν υπάρχουν οι προϋποθέσεις του **θ Bolzano** Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση **F** της συνάρτησης **f** και εφαρμόζουμε το **θ. Rolle** στο **[α,β].**
γ)Βρίσκω το πεδίο τιμών της συνάρτησης το οποίο πρέπει να περιέχει το **0**
δ)Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Παίρνουμε τα όρια στο $-\infty$ και $+\infty$ και εφαρμόζουμε ΘΒ

Δύο τουλάχιστον ρίζες

Χωρίζουμε το Α σε δυο διαστήματα Α1, Α2 οπού $A1\cup A2=A$ και $A1\cap A2=\varnothing$ και κάνω Bolzano ή κάποιες από τις προηγούμενες περιπτώσεις

Μια ακριβώς ρίζα

Για να δειχθεί ότι μια εξίσωση **f(χ)=0** έχει μια μονό ρίζα σε κάποιο διάστημα Α , δείχνουμε πρώτα ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο **Α** και κατόπιν δείχνουμε ότι είναι η μοναδική
α) Εφαρμόζουμε το **θ Bolzano** στο διάστημα που μας δίνεται ή σε διάστημα που βρίσκουμε εμείς και κατόπιν βγάζουμε την συνάρτηση μονότονη.
β) Εξετάζουμε μήπως υπάρχει προφανής ρίζα και τη βγάζουμε γνήσια μονότονη
γ)Εφαρμόζουμε **το θ Bolzano** άρα έχει ρίζα. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει στο Α δυο ρίζες **ρ1≠ρ2** οπού **ρ1<ρ2** και κατόπιν εφαρμόζοντας κατάλληλα το **θ Rolle** στο **[ρ1,ρ2]** καταλήγουμε σε άτοπο.

δ) Βρίσκουμε το πεδίο τιμών της συνάρτησης το οποίο πρέπει να περιέχει το 0 ,και κατόπιν βγάζουμε την συνάρτηση γνήσια μονότονη

Δύο ρίζες ακριβώς

α) Αποδεικνύω ότι έχει 1 ακριβώς σε κάθε διάστημα που χωρίζω το πεδίο ορισμού.
β) Μονοτονία, και σε κάθε διάστημα που είναι γνήσια μονότονη βρίσκω τις ρίζες με την βοήθεια του Π. Τιμών που πρέπει να περιέχει το 0 .Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το πλήθος ριζών μιας εξίσωσης (αναλυτικά δες στο Ε)
γ)Αν η μονοτονία αλλάζει μια φορά αρκεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης να περιέχει το 0

Μία το πολύ ή δεν μπορεί να εχει περισσότερες από μία ρίζες

Είναι γνωστό ότι μια εξίσωση **f(χ)=0** έχει το πολύ μια ρίζα σε κάποιο διάστημα Α αν η συνάρτηση **f είναι γνήσια μονότονη στο Α.**

Β. Η εξίσωση $g'(x)=\kappa$ να έχει ρίζα στο (α,β) ή στο R

Εργαζόμαστε παρόμοια με την Α περίπτωση (όλοι οι όροι στο 1^0 μέλος κλπ) και προκύπτει $g'(x)-\kappa=0$,οπότε χρησιμοποιούμε ένα από τα παρακάτω :

α) Εφαρμόζουμε το **θ Bolzano** για την συνάρτηση $f(x)=g'(x)-\kappa$

β) Βρίσκουμε την μονοτονία και το ΣΤ της $f(x)=g'(x)-\kappa$ για $x\in(\alpha,\beta)$ και εξασφαλίζουμε ότι το $0\in f(A)$

γ) Εφαρμόζουμε το **θ Rolle** για την παράγουσα ,δηλαδή την $f(x)=g(x)-\kappa x$

Γ. επίλυση εξίσωσης $g(x)=0$ ή $g(x)=\kappa$ ή $g(x)=h(x)$

Εργαζόμαστε παρόμοια με την Α , Β περίπτωση (όλοι οι όροι στο 1^0 μέλος κλπ) ,όμως η διαφορά εδώ είναι ότι **πρέπει να βρούμε τις ρίζες** ! Χρησιμοποιούμε λοιπόν ένα από τα παρακάτω :

α) Εξετάζουμε αν υπάρχει προφανής ρίζα x_0 και αν η f είναι γνήσια μονότονη ,θα είναι μοναδική .

β) $g(x)=h(x)\Leftrightarrow \underbrace{g(x)-h(x)}_{f(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)\overset{f1-1}{\Leftrightarrow} x=x_0$

γ) είναι πιθανό η εξίσωση να είναι **σύνθετη** και να πρέπει να αποφύγουμε να θέσουμε $f(x)$ την παράσταση του $1^{ου}$ μέλους . Δηλαδή να ελέγχουμε αν μέσα στην εξίσωση υπάρχει παράσταση πχ $\varphi(x)=x^2+1$ πού προκαλεί συνθετότητα και έτσι έχουμε

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)=0\Leftrightarrow f(\varphi(x))=f(x_0)\overset{f1-1}{\Leftrightarrow} x=x_0$$

πχ για τη εξίσωση $e^{x^2+1}=e-\ln(x^2+1)$ έχουμε $e^{x^2+1}+\ln(x^2+1)=e$ (1) και προσέξτε

↳ δεν θέτουμε $f(x)=e^{x^2+1}+\ln(x^2+1)$ γιατί προκύπτει περίπλοκη συνάρτηση .

↳ θέτουμε $f(x)$ την αντίστοιχη απλή της ,δηλαδή $f(x)=e^x+\ln x$ με $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}>0\Rightarrow f\uparrow$

και η εξίσωση (1) γράφεται $f(x^2+1)=f(1)\overset{f1-1}{\Leftrightarrow} x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$

δ) είναι πολύ πιθανό στις Πανελλαδικές η δοσμένη εξίσωση (ή ανίσωση) να μετασχηματιστεί με πράξεις (πχ ´´ελενίζω´´ και τα 2 μέλη) σε απλούστερη ή να οδηγηθούμε στην συνάρτηση της εκφώνισης !

ε) όταν $f(x_0)=0$ είναι ολικό ελάχιστο (ή ολικό μέγιστο) ,τότε η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$

Δ. εξισώσεις της μορφής $f(g(x)+\kappa)-f(g(x))=f(h(x)+\kappa)-f(h(x))\ (1)$ όπου $f'\uparrow$ (ή κυρτή ή $f''(x)>0$)

Δίνονται συχνά στις πανελλαδικές τέτοιες εξισώσεις ή ανισώσεις

α) εξετάζουμε αν μπορούμε να εργαστούμε με ΘΜΤ ή

β) θεωρούμε την συνάρτηση $F(x)=f(x+\kappa)-f(x)$,οπότε εργαζόμαστε σύμφωνα με τα βήματα

↳ για κάθε $x\in R$ είναι $x+\kappa>x\ \ (2)$ και $F'(x)=f'(x+\kappa)-f'(x)>0\Rightarrow F$ □ γιατί :

↳ Από $(2)\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x+\kappa)>f'(x)\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F$ □ $\Rightarrow F\ \ 1-1$ και έτσι η εξίσωση (1) γράφεται

$$F(g(x))=F(h(x))\overset{F\ 1-1}{\Leftrightarrow}g(x)=h(x)...$$

Ε. πλήθος ριζών εξίσωσης $g(x)=h(x)$

Τα κλασικά ,όλοι οι όροι στο 1^0 μέλος $g(x)=h(x)\Leftrightarrow\underbrace{g(x)-h(x)}_{f(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=0$, και :

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ και τα διαστήματα μονοτονίας της f $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_\kappa$ με τα αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(\Delta_1),f(\Delta_2),...,f(\Delta_\kappa)$,οπότε

↳ αν $0\in f(\Delta_i)$ με $i=1,2,...,\kappa$,τότε στο Δ_i η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα .

↳ αν $0\notin f(\Delta_i)$ με $i=1,2,...,\kappa$,τότε στο Δ_i η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα .

↳ γράφουμε το πλήθος των ριζών

ΣΤ. πλήθος ριζών παραμετρικής εξίσωσης $g(x,\alpha)=h(x,\alpha)$

↳ λύνουμε την εξίσωση ως προς α και την φέρνουμε στην μορφή $f(x)=\alpha$

↳ Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_\kappa$ και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(\Delta_1),f(\Delta_2),...,f(\Delta_\kappa)$,οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις για το α με βάση ότι :

↳ αν $\alpha\in f(\Delta_i)$ με $i=1,2,...,\kappa$,τότε στο Δ_i η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα .

↳ αν $\alpha\notin f(\Delta_i)$ με $i=1,2,...,\kappa$,τότε στο Δ_i η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα .

30. επίλυση ανισώσεων $g(x)>h(x)\Leftrightarrow\overbrace{g(x)-h(x)}^{f(x)}>0\Leftrightarrow f(x)>0$

Εργαζόμαστε παρόμοια με τις εξισώσεις ,χρησιμοποιώντας την μονοτονία .

- $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(x_0)$,οπότε : • αν $f\uparrow\Rightarrow x>x_0$ και • αν $f\downarrow\Rightarrow x<x_0$
- αν έχω πίνακα προσήμου της f ,μπορώ να απαντήσω πότε γίνεται θετική ή αρνητική .
- αν έχω γνωστό το $\Sigma T=f(A)$,μπορώ σε ορισμένες περιπτώσεις να έχω λύση .
- μπορώ να έχω λύση λύση με ΘΜΤ ή μονοτονία ή ακρότατα.
- προσοχή ,αν η ανίσωση είναι σύνθετη εργάζομαι αντίστοιχα με την 29/Γ/γ .

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ... με λυμένες ασκήσεις

Διαβάζοντας με προσοχή τις παραπάνω μεθόδους αρκετοί από εσάς θα θυμηθείτε έννοιες και γνώσεις που έχετε διδαχθεί στο Σχολείο σας ή στο Φροντιστήριο.

Μπορεί όμως για κάποιους να εμφανιστούν δυσκολίες !

Για τον λόγο αυτό προσθέσαμε τον παρακάτω πίνακα με τον οποίο :

► Αφού διαβάσετε την μέθοδο ,μπορείτε να δείτε στον πίνακα ποιες ασκήσεις (κεφάλαιο 2 ή θέματα προσομοίωσης στο κεφάλαιο 3) συσχετίζονται με αυτήν !

► Σε πρώτη φάση ,ειδικά οι μαθητές που έχουν δυσκολίες ,μπορείτε να ασχοληθείτε με τις ασκήσεις του κεφαλαίου 2 ,για εμπέδωδη των μεθόδων .Οι ασκήσεις αυτές είναι οι βασικές - SOS του κεφαλαίου 2 .

► Σε δεύτερη φάση , μπορείτε να ασχοληθείτε με τις ασκήσεις του κεφαλαίου 3 που είναι **θέματα προσομοίωσης εξετάσεων .**Δηλαδή είναι **θέματα επιπέδου Πανελλαδικών !** Έχουν διάρθρωση με ερωτήματα κλιμακούμενης δυσκολίας που αναφέρονται και σε προηγούμενες έννοιες και φυσικά ΄΄προκαλούν΄΄ πίεση επανάληψης !

► Όμως πρώτα να προσπαθείτε να λύνετε μόνοι σας τις ασκήσεις-θέματα και στη συνέχεια να διαβάζετε την λύση.Τίς όποιες δυσκολίες ή απορίες έχετε ,να τις συζητάτε **πάντα σε συνεργασία με τον καθηγητή σας στο on line μάθημα !**

μέθοδοι	ασκήσεις κεφαλαίου 2	ασκήσεις κεφαλαίου 3
1	1,2,3,9	3,6,9,17,18,19
2	2,3	
3	5,52	1,4,5
4	2,3,4	1,3
5	6,7,8,54	2,6
6	6,7	1,5
7	9	
8	10,11,12,13	1,4,6,7,8,9,10,11,12,23,26
9	10,11,12,13	1,4,6,7,8,9,10,11,12,23,26
10	14	
11	16,17,18,,19,20,21,22	18
12	16,17,18,,19,20,21,22	18

13	27,28,29	14,15
14	27,28,29	14,15,16,23
15	23,24,25,26,,57,58	16,24
16	30,31,32,33,34,35,38,44,53,54, 56	12,13,14,15,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29, 30
17	48,54	15,18,19,23,24,29
18		15
19	16,19	
20	26,34,37,47,57,58	9,15,17,20,25,27,29
21	32,33,34,35,36,37,43,44,54	12,13,15,17,19,20,14,25,26,27,28,29,30
22	40	
23	39	
24	44,46,54,56	21,27,28,30
25	45	26
26	49,50,51,52,55	14,21,24,27
27	54	2,6
28		
29	31,32,33,41,43	4,4,13,15,17,18,19,20,22,24,26,28,29,35
30	54,56	12,26,28

δες τις λύσεις

Β ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ...για εμπέδωση μεθόδων

1. εύρεση παραγώγου με κανόνες

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\dfrac{1+ημx}{συνx}$ β) $g(x)=(1+2x^3)\ln x$

2. εύρεση παραγώγου με τον ορισμό

Δίνεται η συνάρτηση f (x) = |x - 1| + x + 3. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη
α) στο σημείο $x_0 = 1$ β) στο σημείο $x_0 = 2$.

3. εύρεση παραγώγου με τον ορισμό και ΚΠ

Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} x^3 ημ\dfrac{3}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

4. εύρεση παραγώγου από δοσμένο όριο

Εστω f(x) συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x^2}{x-2}=3$. Δείξτε ότι f '(2)= -1

5. εύρεση ορίου από δοσμένη παράγωγο

Για τη συνάρτηση f / R ισχύει ότι f(2) = f΄(2) = 3.Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}$

6. εύρεση παραγώγου με τον ορισμό σε συναρτησιακή σχέση

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0 = 0$ και για κάθε χ ε R ισχύει
$f^3(x)-xf^2(x)+x^2f(x)=x^2ημx$. Να δείξετε ότι $f'(0)=1$

7. εύρεση παραγώγου με κανόνες σε σε συναρτησιακή σχέση

Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R και ισχύει ότι
$f(x^2+1)-f(x+1)=x^3+2x^2+3x+1$ για κάθε $x\in R$.Να βρείτε την
παράγωγο της $f(x)$ στο $χ_0=1$

8. εύρεση παραγώγου με κανόνες σε σε συναρτησιακή σχέση

Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε χ ε R ισχύει $f^3(x)+f(x)=xe^x$.
Να βρείτε την παράγωγο $f'(0)$

9. εύρεση παραγώγου με περιπτώσεις

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$,Στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο $x_0=0$

10. εύρεση σημείων με απαίτηση παρ/λίας για την εφαπτόμενη

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+5$

11. εύρεση παραμέτρων με απαίτηση κοινής εφαπτόμενης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

12. απαίτηση ώστε ευθεία να εφάπτεται

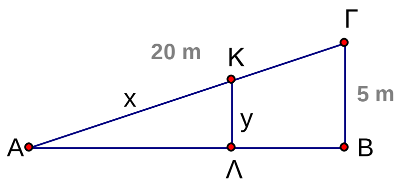
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$, εφάπτεται και στην C_g .

13. εύρεση παραμέτρων ώστε ευθεία να εφάπτεται

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ και η ευθεία (δ) $\psi=(\alpha-2)\chi+\beta+1$. Αν για την f ισχύει ότι
$|f(\chi)-\eta\mu^{2003}\chi| \le \chi^{2002}$ (1) $\forall \chi \in R$ να βρείτε τους α , β ε R ώστε η ε να είναι εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $\chi_0=0$.

14. Ρυθμός Μεταβολής

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/sec . Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί . δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y .



15. Θ Rolle

Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ και α, β, γ >0 με α<β<γ τέτοια ώστε $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$. Να αποδειχθεί ότι :

i) Υπάρχουν κ, λ τέτοια ώστε $f(\kappa)=\kappa f'(\kappa)$ και $f(\lambda)=\lambda f'(\lambda)$

ii) Αν η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\kappa, f(\kappa))$ και $B(\lambda, f(\lambda))$ διέρχεται και από το σημείο O(0,0) , να δειχθεί ότι υπάρχει $\chi_0>0$: $f''(\chi_0)=0$

16. Θ Rolle

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο $[\alpha\ ,\ \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha\ ,\ \beta)$ και $f(\alpha)-\alpha^3=f(\beta)-\beta^3$ (1).Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha\ ,\ \beta)$ ώστε $f'(x_0)=3x_0^2$

17. Θ Rolle

Έστω η συνάρτηση f: [α, β]→R, η οποία είναι συνεχής στο [α,β] ,παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α)=2β, f(β)=2α.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in$(α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\,f'(\xi_2) = 4$

18. Θ Rolle

Θεωρούμε την f συνεχή στο [0, 2] παραγωγίσιμη στο (0, 2) με $f(2)=8$, $f(0)=2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0\ ,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο ξ να είναι παράλληλη με την ευθεία y = 3x + 5

19. Θ Rolle

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και f(0)=f(4) = 0 .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=0$

20. Θ Rolle

Έστω η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] με f(α)=f(β)=0

Αν g(x)=f(x)-γ(x-α)(x-β) και για το τυχαίο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $g(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει ξ ∈ (α,β) τέτοιο ώστε g΄΄(ξ)=0

β) $f(x_0)=f(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(x_0-\alpha)\cdot(x_0-\beta)$

21. Θ Rolle

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2] με f(2)=2f(1) + 2 και $f''(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(1,2)$.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $x(f'(x)-2x)=f(x)-x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(1,2)$.

(β) Δείξτε ότι η ρίζα x_o είναι μοναδική.

(γ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g(x)= f(x) - x^2 στο σημείο x_o, διέρχεται από την αρχή Ο(0,0).

22. Θ Rolle

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία τουλάχιστον στο διάστημα $(0, 1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$

23. ΘΜΤ

Δίνεται η συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$ και ισχύει $2f(2) = f(1) + f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$: $f''(x_0) = 0$.

24. ΘΜΤ

Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε : $f(25) + f(20) = f(35) + f(10)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (10, 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10, 35)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

25. ΘΜΤ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 4] \to R$ για την οποία ισχύει:

- $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(4)=2$
- f παρ/μη στο $(0, 4)$
- f' συνεχής στο $(0, 4)$

Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει $x_1 \in (0, 4)$ ώστε $f'(x_1) = 1$

β) Υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{4}$

γ) Αν f 2 φορές παρ/μη να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 4)$: $f''(x_0) = 0$

26. ΘΜΤ

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = συνx$ και $f(0) = 0$ να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε $(f \circ f)(\alpha+1) - (f \circ f)(\alpha) = συν(f(\xi))συν\xi$ όπου $\alpha \in \Re$.

β) $0 < e^{f(\gamma)} - e^{f(\beta)} < e(\gamma - \beta)$, για κάθε β, γ με $\beta < \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$

27. Συνέπειες ΘΜΤ

Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)συνx + g(x)ημx = g(x)συνx$ και $g(0) = 2017$

28. Συνέπειες ΘΜΤ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$,με $f(0)=\frac{3}{2}$ για την οποία ισχύει ότι :

$f'(x)=\frac{x+2}{x+1}\cdot f(x)+(x+1)e^{-x}$ για κάθε $x>0$.Να βρείτε τον τύπο της f

29. Συνέπειες ΘΜΤ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f και η παραγωγίσιμη συναρτηση $h(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.Αν ισχύει $h(x)=f''(x)e^{f(x)}+(f'(x))^2\cdot e^{f(x)}$ και $f(0)=0, f'(0)=2$

α)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{h(x)}{e^x}$ είναι σταθερή.

β)Να βρείτε τη συνάρτηση f(x) για $x>\ln\frac{1}{2}$

30. μονοτονία

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

31. μονοτονία - εξίσωση

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x + 1)$ είναι γνησίως αύξουσα .

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x + 1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

32. μονοτονία – ΣΤ - παράμετρος

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + α$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$

iii) Αν $-2 < α < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + α = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

33. μονοτονία – ΣΤ – πλήθος ριζών εξίσωσης

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - αx^2 - 9x + α = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = α$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $α\in\mathbb{R}$.

34. μονοτονία – ανισότητα

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση f (x) = 2ημx + εφx – 3x , $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα

ii) 2ημx + εφx ≥ 3x , για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

35. μονοτονία – ακρότατα

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ με

$f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2}$

36. ανισότητα από μονοτονία

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$ για $x \in [0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι:

$f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

37. συνδιαστική - ανισότητα από μονοτονία

Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν :

• $f'(x) < f''(x)$ για κάθε $x \in R$ και • $f'(0) = f(0) = 0$

Να αποδείξετε ότι

α) $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

β)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ για $x \in R^*$.

38. από ανισότητα σε μονοτονία - θεωρητική

α) Να αποδείξετε ότι : $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε x∈[0 , +∞) .

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0 , +∞) για την οποία ισχύει :

$f^5(x) + 2f^3(x) + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$, για κάθε x∈[0 ,+∞). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , +∞) .

39. απόρριψη ακροτάτων

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f^2(x)+2001f(x)=e^{x+1}+x^5+2001x+2007$.Να δείξετε ότι δεν έχει τοπικά ακρότατα

40. από ανισοισότητα σε ισότητα - Θ Fermat

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(e,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν :

• $f(e^2)=0$ και • $f(x)\le \ln x-2$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι $e^2 f'(e^2)-1=0$.

41. δύο το πολύ ρίζες

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^4 = 2\chi^3-30\chi^2-\chi-2$

έχει το πολύ δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

42. απόρριψη ακροτάτων - θεωρητική

Έστω η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$g^{2007}(x)+g^{2001}+g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2008$ (1) για κάθε $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν έχει ακρότατα , $x\in R$.

43. πλήθος ριζών εξίσωσης - ΣΤ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - \alpha$, $\alpha > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

44. μονοτονία - ακρότατα - κυρτότητα - σκ - ΣΤ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

45. κυρτότητα - εφαπτόμενη

Έστω η συνάρτηση f, 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+5$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από την C_f.

46. εύρεση παραμέτρων - ΣΚ

Έστω α πραγματικός αριθμός και f συνάρτηση με

$$f(x)=\frac{x^4}{3}+2\alpha\frac{x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

αλλιώς

Δεν υπάρχει σημείο της C_f, που η εφαπτόμενη σε αυτό να την διαπερνά.

47. θεωρητική με κυρτότητα - ανισότητα

Δίνεται η συνάρτηση f : $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0\in R$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση :

$$f''(x) > 4(f'(x)-f(x)),\ \text{για κάθε}\ x\in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο R.

β) Να αποδείξετε ότι είναι f(x)$\geq$0 , για κάθε $x\in R$.

48. πρόσημο συνάρτησης από κυρτότητα - θεωρητική

Αν η f κυρτή στο R και $f(0)=0$ βρείτε το πρόσημο της $g(x)=f(x)-xf'(x)$

49. εύρεση ορίων απο γνωστή ασύμτωτη - παράμετρος

Έστω ότι η ευθεία y=3x+6 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(x)+4x}{x\cdot f(x)-3x^2+5x}=2$.

50. ΚΑ - ΠΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x+x^2}{x}$.

Να εξετάσετε αν έχει κατακόρυφη και πλάγια ασύμπτωτη

51. εύρεση παραμέτρων απο γνωστή ασύμτωτη

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, $x \in R-\{2\}$, όπου α , $\beta \in \Re$. Αν η ευθεία ε : y = 2x – 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .
στο $+\infty$, να βρείτε τις τιμές των α , β .

52. παράμετρος - ΠΑ - όριο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)+\lambda x+4\le \dfrac{2}{x}$ (1) και $g(x)\ge -4-6x+\dfrac{1}{4x}$ (2) για κάθε $x>0$ και $x\in R$ $g(1)=-2-\lambda$, $g'(1)=-8$.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

iii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+\eta\mu x+4}{xg(x)+6x^2+\ln x}$

53. εύρεση τύπου - όρια - μονοτονία - ασύμπτωτες

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ για κάθε $x\in R^*$

και $xg(x)+g(-x)=x$ για κάθε $x\in R$

i Να βρείτε τους τύπους των f και g

ii Να βρεθούν τα όρια των f, g στα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού τους

iii Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

iv Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των f, g

54. θεωρητική - μονοτονία - ακρότατα - ΣΚ - ανισότητα

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+4f(x)=4x$, $x\in R$ (1)

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής, αν υπάρχουν

iii) Αν $g(x)=2x-f(x)$ να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2-x-2\right)+2x+4\le 2x^2$

55. θεωρητική - ασύμπτωτη - όρια

Εστω f,g : R→R, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$, για x∈R. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς x→+∞.

α) Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση y=2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς x→+∞.

56. μονοτονία - ακρότατα - ανίσωση - ΣΚ - σύγκριση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$ με

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(5x^2-4x\right)\right)>f\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$

γ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της **f** έχει μοναδικό σημείο καμπής.

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2004)+f(2001)$ και $f(2003)+f(2002)$

57. από κυρτότητα σε ανισότητες

α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α , β].

Αποδείξτε ότι αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [α , β] τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, ενώ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α , β] τότε $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ « **Ανισότητες Jensen** »

β) Για κάθε $\alpha\in\Re$ να δείξετε ότι :

$$e^{-(\alpha+1)}+(\alpha+1)^8<\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha}+e^{-(\alpha+2)}+(\alpha+2)^8+\alpha^8\right).$$

58. από κυρτότητα σε ανισότητα

Για την συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Να αποδείξετε ότι :

$$(\beta-x)\big(f(x)-f(\alpha)\big)<(x-\alpha)\big(f(\beta)-f(x)\big)$$

επιστροφή στις εκφωνήσεις

Γ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.

α) $f'(x)=\dfrac{(1+\eta\mu x)'\,\sigma\upsilon\nu x-(1+\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x-(1+\eta\mu x)(-\eta\mu x)}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=$

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu x+\eta\mu^2 x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

β) $g'(x)=(1+2x^3)'\ln x+(1+2x^3)(\ln x)'=6x^2\ln x+(1+2x^3)\dfrac{1}{x}$

2.

Είναι $f(x)=\begin{cases}2x+2 & x\geq 1\\ 4 & x<1\end{cases}$

α) Για την εύρεση της παραγώγου στο $x_0=1$ παίρνω πλευρικά όρια του λόγου μεταβολών

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+2-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4-4}{x-1}=0$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό.

Κατά συνέπεια η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+2-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{x-2}=2$,άρα $f'(2)=2$

3.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\eta\mu\frac{3}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2\eta\mu\dfrac{3}{x})=0$ διότι $\left|x^2\eta\mu\dfrac{3}{x}\right|=|x|^2\left|\eta\mu\dfrac{3}{x}\right|\leq|x|^2$

άρα πο κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}(x^3\eta\mu\dfrac{3}{x})=0$

4.

Θέτουμε $G(x)=\dfrac{f(x)+x^2}{x-2}$ από την οποία προκύπτουν

▪ $\lim\limits_{x\to 2}G(x)=3$ και ▪ $f(x)+x^2=(x-2)G(x)$ άρα $f(x)=(x-2)G(x)-x^2$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2).G(x)-x^2\right]=-4$

και επειδή η f(x) είναι συνεχής στο $x_0=2$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=-4$ οπότε

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)G(x)-x^2-(-4)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)G(x)-(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left[G(x)-(x+2)\right]}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left[G(x)-(x+2)\right]=3-4=-1$

5.

Λόγω υπόθεσης θα έχουμε $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=3$ (1)

Θέτουμε $\frac{f(x)-3}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)-3=(x-2)g(x)$ (2)

Είναι ακόμη $\lim\limits_{x\to2}g(x)=3$ και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$ (3)

Έχουμε $\lim\limits_{x\to2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)}{(x-2)(x-1)}\overset{(2)}{=}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-2)g(x)\left(f(x)+3\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)\left(f(x)+3\right)}{x-1}\overset{(3)}{=}\frac{3\cdot(3+3)}{0-1}=-18$

6.

Είναι $f^3(x)-xf^2(x)+x^2f(x)=x^2ημx$ (1)

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0=0$,θα είναι και συνεχής στο $χ_0$ και κατά συνέπεια θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=L\in R$ (2).

Παίρνουμε όρια στη σχέση (1) και έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left(f^3(x)-xf^2(x)+x^2f(x)\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2ημχ\right)\Leftrightarrow$

$L^3-L^2+L=0\Leftrightarrow L\left(L^2-L+1\right)=0\Leftrightarrow L=0$ (Αφού η εξίσωση $L^2-L+1=0$ έχει Δ=-3<0 και κατά συνέπεια δεν έχει πραγμ. ρίζες). Οπότε η (2)$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ (3)

❖ Στη σχέση (1) διαιρούμε με $χ^3$ και έχουμε :

$\frac{f^3(x)}{x^3}-\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}=\frac{ημx}{x}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^3-\left(\frac{f(x)-f(x)}{x-0}\right)^2+\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{ημx}{x}$ (4)

Αφού η συνάρτη-
ση f είναι
παραγωγίσιμη στο
$χ_0=0$ θα είναι
$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=L\in R$

Οπότε παίρνοντας όρια , στη σχέση (1) για $x\to0$ έχουμε,

$L^3-L^2+L=1\Leftrightarrow L^3-L^2+L-1=0\Leftrightarrow L^2(L-1)+(L-1)=0\Leftrightarrow(L-1)(L^2+1)=0\Leftrightarrow$

$L=1$.Δηλαδή $f'(0)=1$.

7.

Παραγωγίζουμε τη δοσμένη ισότητα(αφού μας δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R) και έχουμε:

$\left[f(x^2+1)-f(x+1)\right]'=(x^3+2x^2+3x+1)'\Leftrightarrow 2xf'(x^2+1)-f'(x+1)=3x^2+4x+3\Leftrightarrow$ (θέτουμε χ=0)

$-f'(0)=3\Leftrightarrow f'(0)=-3$

8. Εργαστείτε όμοια με την 7

9. είναι $A_f=R$ και

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = \begin{cases} (-x)^{\frac{4}{3}}, & x<0 \\ x^{\frac{4}{3}}, & x\geq 0 \end{cases}$$

- Για $x<0$ είναι $f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-1) = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$

- Για $x>0$, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}-0}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{1+\frac{1}{3}}}{x} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)(-x)^{\frac{1}{3}}}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x} = 0 \qquad (1)$$

- Για $x=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{4}{3}}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{3}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x} = 0 \qquad (2)$

Από τις (1), (2) $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = 0x \Leftrightarrow y = 0$

10.

Είναι $A_f = R$ και $f'(x) = 3x^2 - 3$

Η εφαπτομένη είναι $\parallel$ στην ευθεία $y = 9x + 5 \Leftrightarrow f'(x) = 9$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$

- $f(-2) = (-2)^3 - 3.(-2) + 5 = -8 + 6 + 5 = 3$
- $f(2) = 2^3 - 3.2 + 5 = 8 - 6 + 5 = 7$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $A(-2, 3)$, $B(2, 7)$

11.

Είναι $A_f = R$ και $A_g = R^*$

Εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2\alpha x + \beta$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Κοινή εφαπτομένη στη θέση $x_0 = 1 \Leftrightarrow f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta + 2 = 1$ και $2\alpha + \beta = -1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -1$ και $\beta = -1 - 2\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha - 1 - 2\alpha = -1$ και $\beta = -1 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = -1$

12.

Είναι $A_f = R$ και $A_g = R$

Εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}$

↳ $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -2x - 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

Εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, 1)$ ε : $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$\Leftrightarrow y - e^0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$

↳ Θα βρούμε την εφαπτομένη της C_g, που άγεται από το σημείο $A(0, 1)$, το οποίο δεν της ανήκει.

↳ Εφαπτομένη της C_g σε κάποιο σημείο της $\Lambda(x_0, g(x_0))$

$\eta:\ y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(-x_0^2-x_0)=(-2x_0-1)(x-x_0)$ (1)

Η (η) διέρχεται από το Α(0, 1) $\Leftrightarrow\ 1-(-x_0^2-x_0)=(-2x_0-1)(0-x_0)$

$1+x_0^2+x_0=2x_0^2+x_0 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=-1$

Για $x_0=1$ η (η) γίνεται $y-(-1^2-1)=(-2.1-1)(x-1)$

$y+2=-3(x-1) \Leftrightarrow y+2=-3x+3 \Leftrightarrow y=-3x+1$

Για $x_0=-1$ η (η) γίνεται $y-(-1+1)=(2-1)(x+1)$

$y=x+1$, που συμπίπτει με την ε .

13.

↳ Θα βρούμε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $\chi_0=0$

Από τη σχέση (1) παίρνουμε $-x^{2002}\le f(x)-\eta\mu^{2003}x\le x^{2002} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^{2003}-x^{2002}\le f(x)\le \eta\mu^{2003}x+x^{2002}$ (2)

Από τη σχέση (2) έχουμε για χ=0 $0\le f(0)\le 0$ οπότε $f(0)=0$

• Αν χ>0 από $(2)\Rightarrow \dfrac{\eta\mu^{2003}x}{x}-\dfrac{x^{2002}}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{\eta\mu^{2003}x}{x}+\dfrac{x^{2002}}{x}\Rightarrow$

$\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x-x^{2001}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x+x^{2001}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x-x^{2001}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x+x^{2001}\right)=0$

οπότε από κριτήριο Παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ (3)

• Αν χ<0 από $(2)\Rightarrow \dfrac{\eta\mu^{2003}x}{x}-\dfrac{x^{2002}}{x}\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge\dfrac{\eta\mu^{2003}x}{x}+\dfrac{x^{2002}}{x}\Rightarrow$

$\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x-x^{2001}\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x+x^{2001}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x-x^{2001}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu^{2002}x+x^{2001}\right)=0$

οπότε από κριτήριο Παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ (4)

Από $(3),(4)\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$

↳ Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\chi_0=0$ είναι

$\psi-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow\psi-0=0(x-0)\Leftrightarrow\psi=0$ (ε) οπότε για να

είναι η (δ) εφαπτόμενη στο $\chi_0=0$ θα πρέπει

$$\begin{cases}a-2=0\\ \beta+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ \beta=-1\end{cases}$$

14.

1. Ανεξάρτητη μεταβλητή ο χρόνος t.

2. x = x(t) η συνάρτηση που εκφράζει την απομάκρυνση (ΑΚ) (Κ το κουτί)
   y = y(t) η συνάρτηση που εκφράζει την ανύψωση (ΛΚ)

3 Δίνεται $x'(t)=3$
  Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής $y'(t)$

4. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΛΚ , ΑΒΓ

παίρνουμε $\frac{y}{5} = \frac{x}{20} \Rightarrow 4y = x \Rightarrow 4\,y(t) = x(t)$

$4\,y'(t) = x'(t) \Rightarrow 4\,y'(t) = 3 \Rightarrow y'(t) = \frac{3}{4}$ m/sec

15.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ με $0 < α < β < γ$. Προφανώς ισχύουν :

- $g(α) = g(β) = g(γ) = 1$
- Η g είναι συνεχής στα [α, β} και [β, γ] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα (α, β) και (β , γ) με $g'(x) = \frac{f'(x).x - f(x)}{x^2}$ (1)

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχουν $κ \in (α, β)$ και $λ \in (β, γ)$, ώστε : $g'(κ) = 0 = g'(λ)$ και λόγω της (1) προκύπτει $κ.f'(κ) = f(κ)$ και $λ.f'(λ) = f(λ)$ (2)

ii) Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ΟΑ και ΟΒ :

$$λ_{OA} = \frac{f(κ)}{κ} \overset{(2)}{=} f'(κ) \quad \text{και} \quad λ_{OB} = \frac{f(λ)}{λ} \overset{(2)}{=} f'(λ)$$

Εφόσον όμως είναι συνευθειακά τα σημεία Α, Β, Ο θα ισχύει : $λ_{OA} = λ_{OB}$ δηλαδή

$$f'(κ) = f'(λ)$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο [κ, λ] , όπου η f ΄ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη :

υπάρχει $χ_0 \in (κ, λ)$, ώστε $f''(χ_0) = 0$

16.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^3$.

• Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[α, β]$ (σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων)

• Είναι $h'(x) = f'(x) - 3x^2$ ορίζεται στο $(α, β)$ κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$.

Από (1) προκύπτει ότι $h(α) = h(β)$.

Για την $h(x)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolle στο $[α, β]$,κατά συνέπεια υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ ώστε $h'(x_0) = 0$. Δηλαδή $f'(x_0) = 3x_0^2$

17.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x) = f(x) - 2x , η οποία είναι συνεχής στο [α , β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων . Ακόμη είναι g(α) = f(α) – 2α =2(β – α) > 0 και g(β) = f(β) – 2β = -2(β – α) < 0 , αφού β > α . Άρα g(α)g(β) < 0 , επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $γ \in (α , β)$.

β) Είναι f(γ) = 2γ . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α , γ] και παραγωγίσιμη στο (α , γ) οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$ξ_1 \in (α, γ) \subset (α, β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ_1) = \frac{f(γ) - f(α)}{γ - α} = 2\frac{γ - β}{γ - α}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο [γ , β] και παραγωγίσιμη στο (γ , β) , σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ_2 \in (γ, β) \subset (α, β)$ τέτοιο ώστε f ΄(ξ_2) = $\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ = $2\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ = $2\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$. Άρα υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 $\in(\alpha , \beta)$ τέτοια

ώστε f ΄(ξ_1)f ΄(ξ_2) = $2\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}2\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}$ = 4 .

18.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,2)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=3$.

Στην προς απόδειξη σχέση $f'(\xi)=3$ θέτουμε όπου ξ το χ και έχουμε $f'(x)=3\Leftrightarrow$ $f'(x)=(3x)'\Leftrightarrow$ $(f(x)-3x)'=0$

Θεωρουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$

Είναι , λόγω υπόθεσης :

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ (σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων)
- Είναι $g'(x)=f'(x)-3$ ορίζεται στο $(0,2)$ κατά συνέπεια η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$.
- Είναι $g(0)=f(0)-3\cdot0\overset{\upsilon\pi}{=}2$

  και $g(2)=f(2)-3\cdot2\overset{\upsilon\pi}{=}8-6=2$ άρα $g(0)=g(2)$

Για την $g(x)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolle στο $[0,2]$,κατά συνέπεια υπάρχει $\xi\in(0,2)$ ώστε $g'(\xi)=0$.

Δηλαδή $g'(\xi)=f'(\xi)-3=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3$

19.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=e^x f(x)+e^x\cdot f'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$

Στο διάστημα [0 ,4] εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την συνάρτηση g διότι

- g συνεχής στο [0 , 4]
- g παραγωγίσιμη στο (0 , 4)
- $\left.\begin{matrix} g(0)=e^0\cdot f(0)=0 \\ g(4)=e^4\cdot f(4)=0\end{matrix}\right\} g(0)=g(4)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=0$

20.

$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=\gamma(x_0-\alpha)(x_0-\beta)$ (1)

α) g(α)=0 και g(β)=0 Θ.R για g: [α, x_0] g΄(ξ_1)=0

g(x_0)=0 [x_0,β] g΄(ξ_2)=0 $\overset{\Theta.R}{\Rightarrow}$ g΄΄(ξ)=0

β) είναι g΄(x)=f΄(x)-γ(x-β)-γ(x-α) και g΄΄(x)=f΄΄(x)-γ-γ

g΄(ξ)=0$\Rightarrow f''(\xi)-2\gamma=0\Rightarrow\gamma=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} f(x_0)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x_0-\alpha)(x_0-\beta)$

21.

(α) $x[f'(x)-2x] = f(x)-x^2 \Leftrightarrow x[f'(x)-2x]-[f(x)-x^2]=0 \Leftrightarrow$

$x[f(x)-x^2]'-x'[f(x)-x^2]=0 \Leftrightarrow (x\neq 0$, αφού $x\in(1,2))$ $\left[\dfrac{f(x)-x^2}{x}\right]'=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=\dfrac{f(x)-x^2}{x}$ με $x\in[1,2]$

Η G είναι συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2] με

$G'(x)=\dfrac{x[f'(x)-2x]-[f(x)-x^2]}{x^2}$ Ακόμα: $G(1)=\dfrac{f(1)-1}{1}=f(1)-1$ και

$G(2)=\dfrac{f(2)-4}{2}=\dfrac{2f(1)+2-4}{2}=f(1)-1$ Επομένως $G(1)=G(2)$.

Έτσι, από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα τοάχιστον, $x_0\in(1,2)$, ώστε

$G'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{x_0[f'(x_0)-2x_0]-[f(x_0)-x_0^2]}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0[f'(x_0)-2x_0]=f(x_0)-x_0^2$

Δηλαδή η εξίσωση $x[f'(x)-2x]=f(x)-x^2$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $x_0\in(1,2)$

(β) Έστω ότι η εξίσωση $x[f'(x)-2x]=f(x)-x^2$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2\in(1,2)$ με $\rho_1<\rho_1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)= x[f'(x)-2x]-f(x)+x^2$. Η h είναι συνεχής στο [ρ1,ρ2] και παραγωγίσιμη στο (ρ1,ρ2), αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [ρ1,ρ2], με $h'(x)=x(f''(x)-2)$. Επίσης $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\rho1,\rho2)$ τέτοιο ώστε, $h'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi[f''(\xi)-2]=0\Leftrightarrow$ $\xi=0$ άτοπο, γιατί $\xi\in(\rho1,\rho2)\subset(1,2)\Leftrightarrow$ ή $f''(\xi)=2$ αδύνατο από την υπόθεση.

Άρα, η εξίσωση $h(x)=0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες στο (1,2). Επομένως, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

(γ) Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x)-x^2$ στο x_0 έχει εξίσωση: $y-g(x_0)=g'(x_0).(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y-[f(x_0)-x_0^2]=[f'(x_0)-2x_0].(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=f(x_0)-x_0^2+xf'(x_0)-2x_0x-x_0f'(x_0)+2x_0^2\Leftrightarrow$

$y=[f'(x_0)-2x_0]x+f(x_0)+x_0^2-x_0f'(x_0)$ (2)

Πρέπει το σημείο 0 (0,0) να επαληθεύει την (2). Οπότε για x=0 και y=0 έχουμε από τη (2):

$0=f(x_0)+x_0^2-x_0f'(x_0)$ που ισχύει γιατί σύμφωνα με το ερώτημα (α),

$x_0[f''(x_0)-2x_0]=f(x_0)-x_0^2\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-2x_0^2=f(x_0)-x_0^2\Leftrightarrow f(x_0)+x_0^2-x_0f'(x_0)=0$

22.

i) η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού είναι πολυωνυμική

$f(-1) = (-1)^4 - 20(-1)^3 - 25(-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 20 - 25 + 1 + 1 = -2$

$f(0) = 1$

Άρα $f(-1)\,f(0) = -2 < 0$

Επομένως , κατά το θεώρημα Bolzano , η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ_1 στο διάστημα $(-1, 0)$

Ομοίως , η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ_2 στο διάστημα $(0, 1)$

ii) Είναι $f'(x) = 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1$

Έτσι , αρκεί να αποδείξουμε , ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ξ_1, ξ_2).

f συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

f παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) | Rolle $\Rightarrow$ η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ξ_1, ξ_2)

$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

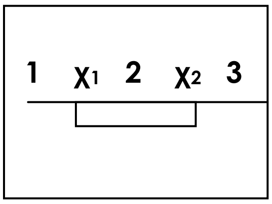
23.

Για τη συνάρτηση f ισχύει φανερά το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[1,3]$.Κατά συνέπεια υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και $x_2 \in (2,3)$ ώστε

$f'(x_1) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ και $f'(x_2) = \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$ (1)

Λόγω υπόθεσης η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$.

Κατά συνέπεια



❖ Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμηστο (x_1, x_2).

❖ Ισχύει ότι $f'(x_1) = f'(x_2)$ αφού

$$f'(x_1) = f'(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \Leftrightarrow f(2)-f(1) = f(3)-f(2)$$

$\Leftrightarrow 2f(2) = f(1)+f(3)$ που ισχύει λόγω υπόθεσης

Οπότε για τη συνάρτηση f ισχύεει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Κατά συνέπεια υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (x_1, x_2) : f''(x_0) = 0$.

24.

Η δοθείσα ισότητα γράφεται f (20) - f (10) = f(35) - f (25) $\Leftrightarrow \dfrac{f(20)-f(10)}{20-10} = \dfrac{f(35)-f(25)}{35-25}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα [10 , 20] και [25 , 35] και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, με $\xi_1 \in (10 , 20)$ και $\xi_2 \in (25 , 35)$.

β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f ΄ στο $[\xi_1 , \xi_2]$.έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (10,35)$: $f''(\xi) = 0$

25.

α) f συνεχής στο [0, 2]
f παρ/μη στο (0 , 2). Άρα ισχύει το ΘΜΤ για την f στο [0, 2] και επομένως υπάρχει $x_1 \in (0, 2) \subseteq (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{2}{2} = 1$

β) f συνεχής στο [2, 4] και f παρ/μη στο (2, 4) f(2) =f (4) = 2 ‘Αρα ισχύει το Θ.R. για την f στο [2, 4] και επομένως υπάρχει $x_2 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$.

Άρα η f' παίρνει τις τιμές 0 και 1 και επειδή f' συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq (0, 4)$ σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών αφού το 1/4 είναι μεταξύ του 0 και του 1 θα υπάρξει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 4)$ ώστε $f'(\xi) = 1/4$.

γ) f δυο φορές παρ/μη στο [0, 4] .’Αρα η f' παρ/μη στο [0, 4] .Επομένως ισχύει το Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_1, \xi] \subseteq (0, 4)$ x_1 2 ξ x_2 4

Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, \xi) \subseteq (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = \dfrac{f'(\xi) - f'(x_1)}{\xi - x_1} = \dfrac{1/4 - 1}{\xi - x_1} = \dfrac{-3/4}{\xi - x_1} < 0$

26.

α) Βρίσκουμε πρώτα ότι f(x) = ημx , οπότε θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε ημ(ημ(α+1)) – ημ(ημα) = συν(ημξ)συνξ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση h(x) = ημ(ημx) στο [α , α+1] παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $0 < e^{\eta\mu\gamma} - e^{\eta\mu\beta} < e(\gamma - \beta)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την $g(x) = e^{\eta\mu x}$ στο [β , γ] .

27.

Ισχύει από υπόθεση ότι $g'(x)\sigma\upsilon\nu x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)' = g(x)\sigma\upsilon\nu x \overset{:\sigma\upsilon\nu^2 x}{\Leftrightarrow} \frac{g'(x)\sigma\upsilon\nu x - g(x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{g(x)\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{A}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = ce^x \Leftrightarrow g(x) = ce^x\sigma\upsilon\nu x \quad (1) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για χ=0 η $(1) \Leftrightarrow g(0) = ce^0\sigma\upsilon\nu 0 \overset{\upsilon\pi o\theta}{\Leftrightarrow} 2017 = c$.Οπότε από $(1) \Leftrightarrow g(x) = 2017e^x\sigma\upsilon\nu x$

29.

- Πολ/ζουμε τη δοσμένη σχέση με χ+1 , οπότε γράφεται ισοδύναμα

$$(x+1)f'(x) = (x+2)\cdot f(x) + (x+1)^2 e^{-x} \Leftrightarrow (x+1)f'(x) - (x+2)\cdot f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

$$(x+1)f'(x) - f(x) - (x+1)f(x) = (x+1)e^{-x} \overset{:(x+1)^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2} - \frac{f(x)}{x+1} = e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' - \frac{f(x)}{x+1} = e^{-x} \quad (1)$$

Θέτω $\dfrac{f(x)}{x+1} = g(x)$ οπότε η (1) γράφεται

$$g'(x) - g(x) = e^{-x} \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} g'(x)e^x - g(x)(e^x)' = 1 \overset{:e^{2x}}{\Leftrightarrow} \frac{g'(x)e^x - g(x)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{e^x}\right)' = \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' \Leftrightarrow \frac{g(x)}{e^x} - \frac{e^{-2x}}{-2} = c \Leftrightarrow g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + ce^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{2}e^{-x} + ce^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + c(x+1)e^x \quad (2)$$

- $f(0) \overset{(2)}{=} -\frac{1}{2} + c \overset{υποθ}{=} \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = 2$ οπότε από (2) έχουμε $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + 2(x+1)e^x$

29.

α) Από (1) και (2) έχουμε: $f'(x)\cdot e^{f(x)} = (f'(x)\cdot e^{f(x)})' \Rightarrow$

$h(x) = h'(x) \Rightarrow h(x) = ce^x \Rightarrow \frac{h(x)}{e^x} = c$

β) $h(x) = ce^x \Rightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} = c\cdot e^x$

Για x=0 : $2\cdot e^0 = c\cdot e^0 \Rightarrow c = 2$ Άρα $f'(x)\cdot e^{f(x)} = 2\cdot e^x$

$\Rightarrow (e^{f(x)})' = (2e^x)' \Rightarrow e^{f(x)} = 2e^x + c_1$ για $x = 0$: $c_1 = -1$

Άρα $e^{f(x)} = 2e^x - 1 \Rightarrow f(x) = \ln(2e^x - 1)$, $x > \ln\frac{1}{2}$

30.

Στο διάστημα □ είναι $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{[x^2+1]^2}$

$$= \frac{x^2+1-x.2x}{[x^2+1]^2} = \frac{1-x^2}{[x^2+1]^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f', όπως και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		□		□		□	

31.

i) $D_f = (-1, +\infty)$, αφού πρέπει $x + 1 > 0$

Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ γράφεται $e^x - 1 + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Αλλά $f(0) = e^0 - 1 + \ln(0+1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$, άρα το 0 είναι ρίζα της f.

Και επειδή f γνησίως αύξουσα , η ρίζα είναι μοναδική.

32.

i) Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ σαν πολυωνυμική.
Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0$, άρα f γνησίως φθίνουσα .

ii)Το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $f([-1, 1]) = [f(1), f(-1)]$
Αλλά $f(1) = 1^3 - 3.1 + \alpha = \alpha - 2$
και $f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + \alpha = -1 + 3 + \alpha = \alpha + 2$
Άρα $f([-1, 1]) = [\alpha - 2, \alpha + 2]$

iii) $f(-1)\, f(1) = (\alpha + 2)(\alpha - 2) = \alpha^2 - 4 < 0$ αφού $-2 < \alpha < 2$.
Και επειδή f συνεχής , κατά Bolzano , η εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή η
$x^3 - 3x + \alpha = 0$, θα έχει ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.
Και αφού f γνησίως φθίνουσα , η ρίζα θα είναι μοναδική.

33.

i) Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ και $x \neq 1$.
Άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 9x)'(x^2 - 1) - (x^3 - 9x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 - 9)(x^2 - 1) - (x^3 - 9x)2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 - 9x^2 + 9 - 2x^4 + 18x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} (x^3 - 9x) = (-1)^3 - 9(-1) = -1 + 9 = 8 > 0$$

και $\lim_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0$ με $x^2 - 1 > 0$ Άρα $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$
Επομένως $f((-\infty, -1)) = (-\infty, +\infty)$
Ομοίως $f((-1, 1)) = (-\infty, +\infty)$ και $f((1, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$

ii) Για κάθε $x \neq \pm 1$ η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \alpha$

$$x^3 - 9x = \alpha x^2 - \alpha \Leftrightarrow x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$$

Ελέγχουμε μήπως οι αριθμοί -1 ή 1 είναι ρίζες της $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$.

- Για τον -1 : $(-1)^3 - \alpha(-1)^2 - 9(-1) + \alpha = 0$
  $-1 - \alpha + 9 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$ που είναι άτοπο
- Για τον 1 : $1^3 - \alpha 1^2 - 9.1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - 9 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -8 = 0$ που είναι άτοπο

Επειδή το σύνολο τιμών της συνεχούς , σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, συνάρτησης f είναι το $(-\infty, +\infty)$, η ευθεία $y = \alpha$ θα τέμνει τη C_f σε τρία σημεία .
Άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ θα έχει τρεις ρίζες.
Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα , οι τρεις ρίζες θα είναι μοναδικές.

34.

i) $f'(x) = 2συνx + \dfrac{1}{συν^2x} - 3 = \dfrac{2συν^3x - 3συν^2x + 1}{συν^2x}$ (1)

Αλλά $2συν^3x - 3συν^2x + 1 = 2συν^3x - 2συν^2x - συν^2x + 1$

$= 2συν^2x(συνx - 1) - (συν^2x - 1) = 2συν^2x(συνx - 1) - (συνx - 1)(συνx + 1)$

$= (συνx - 1)(2συν^2x - συνx - 1) \overset{*}{=} (συνx - 1)\,2\,(συνx + \frac{1}{2})(συνx - 1)$

$= (συνx - 1)^2(2συνx + 1) > 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$*$ $Δ = 1 + 8 = 9$, $συνx = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = 1$ ή $-\dfrac{1}{2}$

(1) $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, και επειδή f συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, θα είναι

f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ii)Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

θα έχουμε $f(0) \le f(x)$ $\Rightarrow$ $2ημ0 + εφ0 - 3.0 \le 2ημx + εφx - 3x$

$0 \le 2ημx + εφx - 3x \Rightarrow 3x \le 2ημx + εφx$

35.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ με

$f'(x) = 2ημχσυνχ - \sqrt{2}συνχ = συνχ\left(2ημχ - \sqrt{2}\right)$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνχ\left(2ημχ - \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} συνχ = 0 & ή \\ ημχ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} & ή \\ x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

↳ Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι συνχ>0 , άρα το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $2ημχ - \sqrt{2}$

↳ Η συνάρτηση $h(x) = ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

οπότε : αν $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ είναι $x < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow ημx < ημ\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow ημx < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2ημχ - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

↳ αν $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $x > \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow ημx > ημ\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow ημx > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2ημχ - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα μεταβολών

Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών έχουμε

↳ Τ.Ελάχιστο $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ημ^2\dfrac{\pi}{4} - \sqrt{2}ημ\dfrac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} =$

$\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$,άρα

χ	0	π/4	π/2
f′	-		+
f	τ.μ. ↘	τ.ε. ↗	τ.μ.

↳ Τ.Μέγιστο $f(0)=2\sqrt{2}$ ↳ Τ.Μέγιστο $f(\frac{\pi}{2})=1+\sqrt{2}$

36.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

Είναι $h'(x)=f'(x)-g'(x)\overset{\upsilon\pi}{=}\eta\mu^2x+e^x>0$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα,οπότε

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $x>0\overset{h\uparrow}{\Rightarrow}h(x)>h(0)\Rightarrow f(x)-g(x)>f(0)-g(0)\Rightarrow f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$

37.

α)Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-f(x)$.Είναι $g'(x)=f''(x)-f'(x)\overset{\upsilon\pi o\theta}{>}0$

Όμως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε έχουμε

↳ Για $\chi<0$ είναι $g(x)<g(0)\Rightarrow f'(x)-f(x)<f'(0)-f(0)\Rightarrow f'(x)-f(x)<0\Rightarrow f'(x)<f(x)$

↳ Για $\chi>0$ είναι $g(x)>g(0)\Rightarrow f'(x)-f(x>f'(0)-f(0)\Rightarrow f'(x)-f(x)>0\Rightarrow f'(x)>f(x)$

β) Είναι $h'(x)=\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=\frac{e^x\left[f'(x)-f(x)\right]}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ οπότε

↳ Για $\chi<0$ είναι $f'(x)<f(x)$ άρα και $h'(x)<0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα

↳ Για $\chi>0$ είναι $f'(x)>f(x)$ άρα και $h'(x)>0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα.

38.

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x) = ln(x+1) - x + $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}$, $x\geq 0$. Είναι :

h΄(x) = $\frac{1}{x+1}$-1+x = $\frac{x^2}{x+1}$>0 για x > 0 και επειδή η h είναι συνεχής στο [0 , +∞)

προκύπτει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , +∞) . Έτσι για κάθε $x\geq 0$ είναι :

h(x)$\geq$ h(0) $\Rightarrow$ ln(x+1) - x + $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}\geq$ ln1-0+0+$\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ ln(x+1) - x + $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}\geq\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ ln(x+1) - x + $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}$ > 0 $\Rightarrow$ ln(x+1) > x - $\frac{x^2}{2}$ - $\frac{1}{5}$.

β) Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας και παίρνουμε :

$5[f(x)]^4f\,'(x)+6[f(x)]^2f\,'(x)+3f\,'(x)$ = ln(x+1) +1 -$\frac{4}{5}$- x + $\frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$

f ΄(x)($5[f(x)]^4+6[f(x)]^2+3$) = ln(x+1) - x + $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}$ (*) , $x\geq 0$.

Η παράσταση $5[f(x)]^4+6[f(x)]^2+3$ έχει θετικό πρόσημο για κάθε $x\geq 0$ ως άθροισμα δύο μη αρνητικών και ενός θετικού αριθμού . Το 2^o μέλος έχει θετικό πρόσημο για κάθε $x\geq 0$ λόγω του (α) και συνεπώς από την (*) προκύπτει f ΄(x) > 0 για κάθε $x\geq 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , +∞) .

39.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R ,αν παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο ,θα έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα του FERMAT ότι $f'(x_0)=0$. (1)

Με παραγώγιση της δοσμένης ισότητας έχουμε

$2f(x)f'(x)+2001f'(x)=e^{x+1}+5x^4+2001$ και για $x=x_0$ γράφεται

$$2f(x_0)f'(x_0)+2001f'(x_0)=e^{x_0+1}+5x_0^{\ 4}+2001 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{x_0+1}+5x_0^{\ 4}+2001=0$$

Άτοπο αφού $e^{x_0+1}+5x_0^{\ 4}+2001>0$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

40.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x+2\le g(e^2)=0$. (1)

- Είναι $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}$ οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(e,+\infty)$,άρα θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=e^2$.
- Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση g έχει ακρότατο στο $x_0=e^2$

  Κατά συνέπεια από το θεώρημα του Fermat έχουμε

  $g'(e^2)=0$ άρα $f'\left(e^2\right)-\dfrac{1}{e^2}=0\Rightarrow e^2f'(e^2)-1=0$

41.

Η εξίσωση γράφεται $x^4-2x^3+30x^2+x+2=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^3+30x^2+x+2$

Έστω η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 (ή και περισσότερες) ρίζες,έστω ρ , ξ ,θ. Δηλαδή

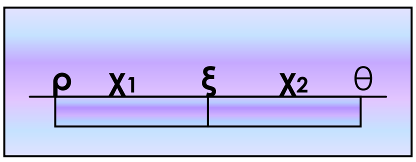
$f(\rho)=f(\xi)=f(\theta)=0$ (1)

Για τη συνάρτηση f ισχύει το Θ.Rolle στα διαστήματα (ρ , ξ)

και $[\xi,\theta]$ αφού

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R σαν πολυωνυμική , άρα και στα διαστήματα $[\rho,\xi]$ και $[\xi,\theta]$.
- $f'(x)=4x^3-6x^2+60x+1$ ορίζεται στο R και κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (ρ,ξ) και (ξ,θ)
- Είναι $f(\rho)=f(\xi)=f(\theta)$ (λόγω (1))

  Κατά συνέπεια υπάρχουν x_1, x_2 στα διαστήματα (ρ,ξ) και (ξ,θ) ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ (2)



Για τη συνάρτηση f' ισχύει το Θ.Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$ αφου

- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο .. σαν πολυωνυμική , άρα και στο διάστημα $[x_1,x_2]$
- $f''(x)=12x^2-12x+60$ ορίζεται στο R και κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2)
- Είναι $f'(x_1)=f'(x_2)$ (λόγω (2))

  Κατά συνέπεια υπάρχει x_0 στο διάστημα (x_1,x_2) ώστε $f''(x_0)=0$

  Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η εξίσωση

  $f''(x)=12x^2-12x+60=0 \Leftrightarrow 12\left(x^2-x+5\right)=0 \Leftrightarrow x^2-x+5=0$

  δεν έχει πραγμ. ρίζες αφου Δ=-19<0.

  Κατά συνέπεια η εξίσωση $x^4 = 2x^3-30x^2-x-2$ έχει δύο το πολύ πραγμ. ρίζες

42.

- Έστω η συνάρτηση g έχει ένα ακρότατο σ΄ένα σημείο $x_0 \in R$.
- Η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R ,άρα και στο x_0.

Κατά συνέπεια από το Θεώρημα Fermat θα ισχύει

$g'(x_0)=0$ (2)

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1) και έχουμε

$$\left(g^{2007}(x)+g^{2001}(x)+g(x)\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2008\right)' \Rightarrow$$

$$2007g^{2006}(x)g'(x)+2001g^{2000}(x)g'(x)+g'(x)=x^2+x+3 \Rightarrow$$

με $x \in R$, οπότε για $x=x_0$

έχουμε $2007g^{2006}(x_0)g'(x_0)+2001g^{2000}(x_0)g'(x_0)+g'(x_0)=x_0^{\,2}+x_0+3 \Rightarrow$

$x_0^{\,2}+x_0+3=0$ που είναι άτοπο γιατί $x_0^{\,2}+x_0+3>0$,

αφού Δ=-11<0. Κατά συνέπεια η συνάρτηση g δεν έχει ακρότατα.

43.

α) f ΄(x) = $4x^3 - 12x^2 + 10x = 2x(2x^2 - 6x + 5)$. Τα ζητούμενα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ΄(x)	–	0	+
f(x)	↘	ο.ε. f(0) = - α	↗

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\Re) = f((-\infty, 0)) \quad f([0, +\infty)) =$

$= (\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)) \cup [f(0), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = (-\alpha, +\infty) \cup [-\alpha, +\infty) = [-\alpha, +\infty)$.

γ) Επειδή $0 \in (-\alpha, +\infty)$ και $0 \in [-\alpha, +\infty)$ και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$ η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο R .

44.

α) Πρέπει $x > 0$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f'(x) = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$2\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$ (αφού $x > 0$) . Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	ο.ε.	↗	

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$, ενώ παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο στη θέση $e^{-\frac{1}{2}}$ το

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1} \square \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2e}$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f''(x) = (x)'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 3$ και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$. Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		∩	Σ.Κ.	∪	

Έτσι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ και άνω στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, ενώ η C_f έχει σημείο καμπής το $(e^{-\frac{3}{2}}, f(e^{-\frac{3}{2}}))$ δηλαδή το $(e^{-\frac{3}{2}}, \frac{-3}{2e^3})$.

γ) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A και έχει ολικό ελάχιστο το $\frac{-1}{2e}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Η προβολή της C_f στον y΄y (ανεξάρτητα από την συμπεριφορά της f κοντά στο 0) θα είναι το το $[\frac{-1}{2e}, +\infty) = f(A)$.

45.

Πολλαπλασιάζουμε τη δοσμένη σχέση με χ και έχουμε :

$xf'(x) = f(x) + 5x$ ή

$f'(x)x - f(x)x' = 5x$ ή (διαιρούμε με x^2)

$\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = \frac{5x}{x^2}$ ή $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (5\ln x)'$ οπότε $\frac{f(x)}{x} - 5\ln x = c$

(με $c \in R$) ή $f(x) = 5x\ln x + cx$ οπότε $f'(x) = 5\ln x + 5x\frac{1}{x} + c = 5\ln x + c + 5 \Rightarrow f''(x) = \frac{5}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0, +\infty)$ και κατά συνέπεια η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από την C_f.

46.

Για την f έχουμε ότι έχει πεδίο ορισμού το D(f)=R, επίσης ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό.

$f'(x) = 4\frac{x^3}{3} + 2\alpha x^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x(\alpha^3 + 7)$

$f''(x) = 4x^2 + 4\alpha x + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)$.

Η εξίσωση τώρα $f''(x) = 0$ έχει διακρίνουσα την $\Delta_1 = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5)$. Το τριώνυμο όμως $\alpha^2 - 4\alpha + 5$ έχει διακρίνουσα την $\Delta_2 = -4 < 0$ κατά συνέπεια θα είναι $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0, \forall \alpha \in \Re$ οπότε θα έχουμε $\Delta_1 < 0, \forall \alpha \in R$. Συνεπώς $\forall \alpha \in \Re$ η εξίσωση $f''(x) = 0$ δεν έχει ρίζα πραγματικό αριθμό, και για το λόγο αυτό η γραφική της παράσταση δεν θα παρουσιάζει σημεία καμπής.

47.

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε :

$g΄(x) = f΄(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x}$, $g΄΄(x) = f΄΄(x)e^{-2x} - 2f΄(x)e^{-2x} - 2f΄(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x} =$
$= e^{-2x}(f΄΄(x) - 4f΄(x) + 4f(x))$. Από την υπόθεση για κάθε $x \in R$ είναι
$f΄΄(x) > 4(f΄(x) - f(x)) \Leftrightarrow f΄΄(x) - 4f΄(x) + 4f(x) > 0$ και επειδή $e^{-2x} > 0$ θα είναι
$g΄΄(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$, συνεπώς η g είναι κυρτή στο R.

β) Ισχύουν $f΄(x_o) = 0$ (θεώρημα Fermat) και $f(x_o) = 0$.Επειδή $g(x) = f(x)e^{-2x}$ και
$e^{-2x} > 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$.
Η g είναι κυρτή στο $\Re$ άρα η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$. Έτσι έχουμε :

- Για $x > x_o \Rightarrow g΄(x) > g΄(x_o) \Rightarrow g΄(x) > f΄(x_o) - 2f(x_o)e^{-2x_0} \Rightarrow g΄(x) > 0$.
- Για $x < x_o \Rightarrow g΄(x) < g΄(x_o) \Rightarrow g΄(x) < f΄(x_o)e^{-2x_0} - 2f(x_o)e^{-2x_0} \Rightarrow g΄(x) < 0$.
- $g΄(x_o) = f΄(x_o)e^{-2x_0} - 2f(x_o)e^{-2x_0} = 0$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_o , το $g(x_o) = f(x_o)e^{-2x_0} = 0$,
συνεπώς για κάθε $x \in R$ είναι $g(x) \geq g(x_o) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

48.

- Αν $x<0$ στο διάστημα [χ , 0] ισχύει το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει x_o μεταξύ του χ και του 0 ώστε: $f'(x_o)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f' η οποία είναι γνησίως αύξουσα αφού f κυρτή στο IR ως εξής: $x<x_o<0$ άρα $f'(x)<f'(x_o)<f'(0) \Leftrightarrow$ $f'(x)<\frac{f(x)}{x}<f'(0)$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ανισότητα με το αρνητικό χ , αλλάζοντας τη φορά της : $xf'(x)>f(x)$ επομένως: $g(x)<0$ για κάθε χε$(-\infty,0)$.
- Με τον ίδιο τρόπο αν χ>0 θα συμπεράνουμε ότι: $g(x)<0$ για κάθε χε $(0,+\infty)$.

49.

α) Επειδή η ευθεία y=3x+6 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, έχουμε
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=6$.

β) Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(x)+4x}{x\cdot f(x)-3x^2+5x}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot\frac{f(x)}{x}+4}{f(x)-3x+5}=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\mu\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+4}{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)+5}=2 \Rightarrow \frac{\mu\cdot 3+4}{6+5}=2 \Rightarrow 3\mu=18 \Rightarrow \mu=6 .$$

50.

Η f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\ln x+x^2)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$,άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x^2}{x^2}\overset{DH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+x^2)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+2x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}+1\right)=0+1=1=\lambda x\in R$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+x^2}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x^2-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{DH}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Άρα η ευθεία $\psi=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

51.

Επειδή η ε : y = 2x – 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,
θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ = 2 και $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (f(x) – 2x) = -1 . Έχουμε λοιπόν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x}{x^2-2x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha+\beta\frac{1}{x}}{1-2\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha+0}{1-0} = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (f(x) – 2x) = -1 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+\beta x}{x-2} - 2x\right) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+\beta x}{x-2} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\beta}{1-2\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow \dfrac{4+\beta}{1-0} = -1 \Rightarrow \beta = -5$ (είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$) .

52.

i) με αντικατάσταση στην διπλη ανισοτική παίρνουμε $\lambda = 6$

ii) με ΚΠ παίρνουμε ότι $y = -6x - 4$
είναι ΠΑ της f στο $+\infty$

iii) εργαστείτε όπως στο θέμα 49

53.

i Θέτοντας όπου x το $\dfrac{1}{x}$ στη σχέση $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x(1)$ έχουμε $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{3}{x}(2)$. Λύνοντας τώρα την (1) ως προς $f(1/x)$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$2\left(3x-2f(x)\right)+f(x)=\frac{3}{x} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(x)=\frac{2x^2-1}{x}$$

Η σχέση $x\cdot g(x)+g(-x)=x(3)$ βάζοντας όπου x το -x δίνει $-xg(-x)+g(x)=-x(4)$ οπότε λύνοντας την (3) ως προς $g(-x)$ και αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε:

$$-x\left(x-xg(x)\right)+g(x)=-x \Leftrightarrow -x^2+x^2g(x)+g(x)=-x \Leftrightarrow g(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1}$$

ii Το πεδίο ορισμού της f είναι το $R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty, \lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$$

Το πεδίο ορισμού της g είναι το R

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=1, \lim_{x\to+\infty}g(x)=1$$

iii $f'(x)>0 \forall x\in R^*$ άρα η f είναι ↑ στα $(-\infty,0),(0,+\infty)$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

iv <u>Ασύμπτωτες της f</u>
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ άρα η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^{-1}}{x^2}=2=\lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=...=0=\beta$ άρα η y=x πλάγια ασύμπτωτης C_f στο $+\infty$. Όμοια και στο

η y=χ είναι πλάγια ασύμπτωτη

Ασύμπτωτες της g

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. Άρα y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της g

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει .

54.

i. Από την δοσμένη σχέση με παραγώγιση παίρνουμε

$$3f^2(x)f'(x)+4f'(x)=4\Rightarrow\left(3f^2(x)+4\right)f'(x)=4\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3f^2(x)+4}>0\quad(1)$$

Φανερά λοιπόν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Θέτουμε στην δοσμένη σχέση $x=0$ και παίρνουμε :

$f^3(0)+4f(0)=0\Rightarrow\left(f^2(0)+4\right)f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$, δηλαδή το $x=0$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γν. μονότονη ,θα είναι μοναδική .

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$(-)$	0	$(+)$

• αν $x<0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$ • αν $x>0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$

ii. από την (1) προκύπτει ότι η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

Έτσι παραγωγίζοντας έχουμε …

$$f''(x)=-\frac{4}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}\cdot\left(3f^2(x)+4\right)'=-\frac{24f'(x)}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}\cdot f(x)\quad(2)$$

Όμως $-\frac{24f'(x)}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}$ και με βάση το πρόσημο της f στον παραπάνω πίνακα

έχουμε :

• $f''(x)>0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$ και • $f''(x)<0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(x)>0\Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

Έτσι λοιπό έχουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας

x	**-** ∞	**0**	**+** ∞
$f''(x)$	**+**		**–**
$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$

Η f είναι κυρτή

στο $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$,έχει δε ΣΚ το σημείο $A\left(0,0\right)$.

iii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.Έτσι έχουμε

$$g'\left(x\right)=2-f'\left(x\right)=2-\frac{4}{3f^2\left(x\right)+4}=\frac{6f^2\left(x\right)+8-4}{2}=\frac{6f^2\left(x\right)+4}{2}>0$$

για κάθε $x\in R$,οπότε η g είναι γν. αύξουσα στο R.

iv) είναι $f\left(x^2-x-2\right)+2x+4\le 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4-f\left(x^2-x-2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-2\right)-f\left(x^2-x-2\right)\ge 0 \Leftrightarrow g\left(x^2-x-2\right)\ge 0 \Leftrightarrow g\left(x^2-x-2\right)\ge g\left(0\right)\quad \left(3\right)$

Όμως $g\left(x\right)=2\cdot 0-f\left(0\right)=0$ και έτσι έχουμε :

$\left(3\right)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

55.

α) Από την f(x) - g(x) = x- 4 παίρνουμε g(x) = f(x) –x + 4 , για $x\in R$. Επειδή η ευθεία με εξίσωση y = 3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x\to+\infty$, θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-7$. Έτσι είναι :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-1+\frac{4}{x}\right)=3-1+0=2$. Ακόμη :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)}{x}+3+\frac{\eta\mu 2x}{x}}{(f(x)-3x)+\frac{1}{x}}=\frac{2+3+0}{-7+0}=-\frac{5}{7}$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$ (για κάθε x > 0 : $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$) .

β) Για να δείξουμε ότι η ευθεία με εξίσωση y = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x\to+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=-3$. Η ισότητα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$ έχει αποδειχθεί στο (α) . Έχουμε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+4-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)+4=-7+4=-3$ και συνεπώς το ζητούμενο έχει αποδειχθεί .

56.

α) είναι $f'\left(x\right)=x^4+x^3+x^2+x+1\quad\left(1\right)$ και για την μελέτη του προσήμου της κάνουμε τέχνασμα .

- αν $x=1$ έχουμε $f'\left(1\right)=5>0$
- αν $x\neq 1$ έχουμε από την (1) προκύπτει

$$\left(x-1\right)f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\Rightarrow\left(x-1\right)f'\left(x\right)=x^5-1\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{x^5-1}{x-1}$$

και έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- αν $x<1$ τότε και $x^5<1$,οπότε $f'\left(x\right)>0$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

• αν $x > 1$ τότε και $x^5 > 1$,οπότε $f'(x) > 0$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Όμως η f είναι συνεχής στο R (πολυωνυμική) ,οπότε είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$ και κατά συνέπεια η f είναι γν. αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα .

β) Παρατηρούμε ότι $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=f(1)$,οπότε έχουμε :

$$f\left(f\left(5x^2-4x\right)\right) > f\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow f\left(f\left(5x^2-4x\right)\right) > f\left(f(1)\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(5x^2-4x\right) > f(1)$$

$$\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 5x^2-4x > 1 \Leftrightarrow 5x^2-4x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,-\frac{1}{5}\right) \cup (1,+\infty).$$

γ) είναι $f'(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$ και $f''(x) = 4x^3+3x^2+2x+1$, συνεχής στο R .

Εδώ η μελέτη της κυρτότητας μέσω του προσήμου της f'' δεν είναι εύκολη υπόθεση ! Παρατηρούμε όμως ότι :

• $f''(1) = 4\cdot 1^3+3\cdot 1^2+2\cdot +1 = 10 > 0$ και

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3+3x^2+2x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3\right) = -\infty$,οπότε θα υπάρχει β κοντά στο $-\infty$,ώστε $f''(\beta) < 0$.

Έτσι με εφαρμογή Θ. Bolzano για την f'' στο $[1, x_0]$,προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\,(1,\beta)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.

Προσοχή όμως ,το παραπάνω δεν μας εξασφαλίζει ότι το $(x_0, f(x_0))$ είναι ΣΚ !

Πρέπει αριστερά-δεξιά του x_0 η f'' να αλλάζει πρόσημο ,δηλαδή η f να αλλάζει κυρτότητα .

Είναι $f'''(x) = \left(4x^3+3x^2+2x+1\right)' = 12x^2+6x+2 > 0$ για κάθε $x \in$ R ,αφού $\Delta < 0$.

Κατά συνέπεια η f'' είναι γν. αύξουσα και το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f''(x) = 0$.Έτσι έχουμε

• για $x < x_0 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(x) < f''(x_0) \Rightarrow f''(x) < 0$ και

• για $x > x_0 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Rightarrow f''(x) > 0$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας κυρτότητας της f και σύμφωνα με τα παραπάνω ,στο x_0 έχουμε μοναδικό ΣΚ

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

δ) Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$ (όπου $x_0 < 0$).

Κατά συνέπεια για κάθε $x > 0$ είναι και $f''(x) > 0$,επομένως η f' είναι γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για την f ισχύει φανερά το ΘΜΤ στα διαστήματα $[2001, 2002]$ και $[2003, 2004]$,οπότε θα υπάρχουν $\xi_1 \in (2001, 2002)$ και $\xi_2 \in (2003, 2004)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2002)-f(2001)}{2002-2001} = f(2002)-f(2001) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2004)-f(2003)}{2004-2003} = f(2004)-f(2003)$$

και έχουμε :

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow f(2002)-f(2001)<f(2004)-f(2003)$$,οπότε θα είναι και

$$f(2004)+f(2001)>f(2003)+f(2002)$$

57.

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα [α , $\frac{\alpha+\beta}{2}$] , [$\frac{\alpha+\beta}{2}$, β] οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2})$, $\xi_2\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta)$ τέτοια ώστε

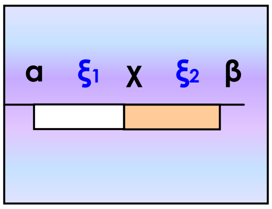
$$f'(\xi_1)=\frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

. Αν η f είναι κυρτή (κοίλη) τότε η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) οπότε $\xi_1<\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ ($f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$) και μετά τις πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^8$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\Re$, οπότε αν εφαρμόσουμε το (α) για την f στο [α , α+2] , παίρνουμε το ζητούμενο .

58.

Για την f ισχύουν φανερά οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha,x]$ και $[x,\beta]$.



Κατά συνέπεια υπάρχουν :

- $\xi_1\in(\alpha,x)$ ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$
- $\xi_2\in(x,\beta)$ ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$

Όμως $f''(x)>0 \Leftrightarrow f'\uparrow$ οπότε

$$\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\overset{\cdot(x-\alpha)(\beta-x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$(\beta-x)(f(x)-f(\alpha))<(x-\alpha)(f(\beta)-f(x))$$

3 ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ εξετάσεων

δες τις λύσεις

Α ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ .... και όχι μόνο

1. εύρεση τιμής παραγώγου - εξίσωση εφαπτόμενης

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,η οποία είναι συνεχής στο $x=0$ και να ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{\eta\mu x}=3$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=4$

iii) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

2. μονοτονία-ύπαρξη-παράγωγος

Δίνεται η γνήσια μονότονη και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,παραγωγίσιμη στο $x_0=0$,για την οποία ισχύει ότι $f(f(x))=2f(x)-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα .

ii) Αν $f(0)=0$ τότε η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την ευθεία $y=-x$

iii) Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,7)$ ώστε $10f(x_0)+56=2f(2)+6f(4)+12f(7)$

iv) $f'(0)=1$

3. συνέχεια – παράγωγος - όρια

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^5\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} & \alpha\nu\ \ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ x=0\end{cases}$.

(A) Να δείξετε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(B) Να δείξετε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(Γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν τα όρια :

i) $\lim_{h\to 0}\left[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right]=0$ ii) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=f''(x)$

4. από δοσμένη συνθήκη και παράγωγο σε ύπαρξη και όρια

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $\mathbb{R}$,
για την οποία ισχύει $f'(f(x))+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=f'(2)=3$.

Α) Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=3$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία .

Β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x}{2}=f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{1+f(x)}-2}{f(x)-3}$ iii) $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-3}{\eta\mu(x-2)}$

5. δοσμένη συνθήκη και παράγωγος σε ύπαρξη , όρια και παράγωγο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f(0)=f'(0)=1$

και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{2x-3}{f(x)}$ (1).

Α) Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to0}(f(x)-g(x))$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(\frac{x\eta\mu x+2}{x^2}\right)$

Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και να βρείτε τον αριθμό $g'(0)$.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα .

Δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)+2}{\eta\mu x}$

6. πρόσημο παραγώγου-π.ο.-εφαπτόμενη-όριο

Δίνεται η παραγωρίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f^3(x)-2f^2(x)+3f(x)=x^2-2x \quad (1) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ και :

i) το πρόσημο της συνάρτησης $f'(x)$

ii) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln\frac{f'(x)}{x^2+e^x}$

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$

Γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+x^2}{\eta\mu2x}$

7. παραγωγισιμότητα - εύρεση τύπου - όριο - εύρεση παραμέτρου

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν :
$f(x+y)=\alpha xy+y^2+f(x)\quad (1)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f(1)=-1$, $f(2)=2$, $\alpha\in R$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την παράγωγο της.

Β. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-2$

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{f'(x)}-e^2}{x-1}$

Δ. Να βρείτε τον $\lambda\in R$,ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=1$,να είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: y=(2\lambda+1)x-3$

8. όριο παράστασης - εφαπτόμενη

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ άρτια ,παραγωγίσιμη και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)=\left(\dfrac{x^4}{4}+7x+1\right)f(x)+x^2$

Α.Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: \psi-7f(0)x+3=0$.

9. πρόσημο πρώτης παραγώγου - εφαπτόμενη

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{(\lambda-2)\cdot x}$, λ > 2.

Α. Δείξτε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$

Β.Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων , είναι η $\psi=(\lambda-2)ex$.Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

10. όριο - παράγωγος - κοινή εφαπτόμενη

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$.

Α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\ln(x+1)}{g(x)}$

Β. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

Γ. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των f,g

11. εύρεση τύπου από συνέχεια-όρια - εφαπτόμενη

Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$$(x-1)f(x)+1=e^{x-1}\ ,x\neq 1.$$

$A)$ Να βρείτε τον τύπο της f.

$B)$ Να βρείτε το $f'(1)$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$.

$\Gamma)$ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

$\Delta)$ Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x-1)\ln(x-1)\ln f(x)\right]$.

12. μονοτονία – ΠΟf^{-1} – ανίσωση – υπολογισμός παραμέτρων

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+e^{x-1}\right)-x+1$

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .

Β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(-4f'(x))}>\dfrac{e+1}{e}$

Δ. Να βρείτε τους $\kappa,\lambda\in R$,ώστε η ευθεία (ε) $y=\kappa x+\lambda+\ln 2$,να εφάπτεται της C_f $x_0=1$.

13. μονοτονία - εξίσωση-πρόσημο-σύνολο τιμών

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)+1-\dfrac{1}{e^x}$,$x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Γ. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)$ και το σύνολο τιμών της.

14. εύρεση τύπου – μονοτονία - εύρεση παραμέτρων

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to R$ με $f(-1)=0$

και $xf(x)+x^2f'(x)=\dfrac{x^2}{e^{xf(x)}}+1$ για κάθε $x<0$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2\ln(-x)}{x}$ για κάθε $x<0$.

Β. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Γ. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η ευθεία $y=\left(e^{\alpha}-\alpha-1\right)x+\beta-2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτος της C_f στο $-\infty$

15. εύρεση τύπου - εξίσωση-ανισότητα - μονοτονία

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(x)\neq \ln x \text{ και } f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}-x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=0$$

Α. Να δείξετε ότι

i) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$ και

ii) η εξίσωση $x+2\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

iii) $f(x)<x$

Β. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}$

i) Να δείξετε ότι g δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της g

16. εύρεση τιμών από σχέση παράγουσας - Θ.Β. - ΘΜΤ

Δίνεται ότι η συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

και ισχύει $F(1-2x)+F(x^2+2)=x^4+5x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

i) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σ΄ένα τουλάχιστο σημείο.

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ έτσι ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}=2$

17. μονοτονία - ΣΤ – εξίσωση - ανισότητα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{7-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^3}{10}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Γ. Δίνεται ότι $0<\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι $\dfrac{\ln^2\beta+1}{\ln^2\alpha+1}<\dfrac{\beta}{\alpha}$

18. μονοτονία σε δοσμένο διάστημα- εξίσωση-ύπαρξη

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\,\ell nx-1$, x>0

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $Δ_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $Δ_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(1,e)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2015}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Δ. Αν x_1, x_1 με $x_1< x_1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2014$$

19. γωνία εφαπτόμενης – μονοτονία – σύνολο τιμών - ρίζα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$, $x>0$

Α. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $x_0=1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

Β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία .

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=2015\left(e^{\ln x}-\ln(x+1)\right)$ έχει μοναδική θετική ρίζα .

20. εύρεση τύπου – μονοτονία – εξίσωση - ανισότητα

Δίνεται η συνάρτηση f ,για την οποία ισχύει :

$$e^x-e^{f(x)}=e^{x+f(x)} \quad (1) \text{ για κάθε } x\in R$$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Β. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις f και f'.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $(e+1)e^{f(2f'(x))}=e$

Δ.Αν $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι : $\alpha-\beta<\ln\dfrac{1+e^\beta}{e^\alpha}$

21. παραγωγισιμότητα - παράγωγος αριθμού

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2)$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f'(x)$

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$

έχει μοναδική ρίζα στο $(1,+\infty)$.

22. παράγωγος – μονοτονία , ακρότατα – όριο - εξίσωση

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)\ ,\ x>0$.
α) Να βρείτε την παράγωγο f ΄ της f για κάθε x>0 .
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα
γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ η εξίσωση $\alpha\ln x=\frac{\alpha^2+4}{x-2}$ έχει μοναδική ρίζα

23. μονοτονία με ΘΜΤ – εφαπτόμενη - όριο

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\geq 0$ και $f(0)=0$, $f'(0)=2$,τότε :

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=2015e^x+\frac{f(x)}{x}$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$.

Β.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0=0$.

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2015e^x+\frac{f(x)}{x}\right)\cdot\frac{\ln x}{x^2}$

24. μονοτονία – ΣΤ – ασύμπτωτες-ανισότητα-εξίσωση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Α.Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της και το σύνολο τιμών της .

Β.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της .

Γ. Έστω οι αριθμοί α,β με $1<\alpha<\beta$.Να δείξετε ότι $(\alpha+1)^{\ln\beta}<(\beta+1)^{\ln\alpha}$

Δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό κ ,να δείξετε ότι η εξίσωση

$\ln(x+1)=(\kappa^2+1)\ln x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,+\infty)$

25. μονοτονία – ανισότητες

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{1}{2}$.

A. Να δείξετε ότι $f'(x)\le\sqrt{2}f(x)$ για κάθε $x\in R$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)=e^{-\sqrt{2}x}f(x)$.Να δείξετε ότι :

i) Η g είναι γνησίως φθίνουσα .

ii) $\ln\frac{f(2)}{f(1)}<\sqrt{2}$.   iii) $f(x)\le f(0)e^{\sqrt{2}x}$ για κάθε $x\ge 0$.

26. μονοτονία – ΠΟ$_f$ – ανίσωση –παραμετρος και ΣΤ- ανίσωση από κυρτότητα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+e^{x-2})-x+2$

A. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .

B. i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1-\ln(\alpha-1)$, $\alpha>1$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(-6f'(x))}<\frac{e+1}{e}$

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{1}{2}x+3$.Στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\ln\frac{1+e^{x-2}}{2}\le\frac{x-2}{2}$

27. μονοτονία – ΠΟ$_{f^{-1}}$ – ανισότητα – κυρτότητα - γραφ. παράσταση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{x-1}{x}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του ΠΟ και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Γ) Αν $\alpha,\beta>e$,να δείξετε ότι $\frac{\ln\alpha-1}{\ln\alpha}+\frac{\ln\beta-1}{\ln\beta}>2e^{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

Δ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κυρτά,κοίλα ,τις ασύπτωτες και να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση

28. μονοτονία – ΠΟf^{-1} – ανισότητα – κυρτότητα - γραφ. παράσταση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ και $g(x)=-x^2+2x$

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας τους και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο,ενώ η g παρουσιάζει μέγιστο στην ίδια θέση x_0 την οποία και να βρείτε .

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ. Να βρείτε τα $\lambda\in R$ για τα οποία η εξίσωση $f(x)=\lambda^2-6\lambda+6$ έχει λύση στο R .

Δ. Να βρείτε τα $\alpha>\dfrac{1}{2}$ για τα οποία ισχύει $f(2\alpha-1)+f\left(e^{\alpha-1}\right)\le 2$

Ε. Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την εξίσωση $1+x\sqrt{x}-2\sqrt{x}=\dfrac{\ln x}{2x}$

29. μονοτονία –ΣΤ - πλήθος ριζών – ανισότητα - εξίσωση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x-1$.

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το πρόσημο της $f(x)$.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1+(x-1)e^x=(\alpha-1)e^x$ όταν $\alpha\in R$.

Γ. Για κάθε $x>0$,να δείξετε ότι $1+\dfrac{x^2}{2}>e^{-x}+x$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f\left(x^2\right)+\ln x$

30. εύρεση τύπου - μονοτονία – ΣΤ – κυρτότητα – εξίσωση - όριο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}+\dfrac{\ln x}{x}$

Γ_1. α.Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι $f(x)=x+\dfrac{1+\ln x}{x}$

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ_2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=x^2f'(x)$.

Γ_3. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό κ , η εξίσωση : $h(x)=\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln 2$ έχει μια τουλάχιστο λύση στο $(0,+\infty)$.

Γ_1. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to\infty} x^3f'(x)\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

1.

i) Θέτουμε $\frac{f(x)-x}{\eta\mu x}=g(x)$,με $x\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=3$,οπότε :

$f(x)-x=g(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)=g(x)\eta\mu x+x$ με $x\neq 0$.

Παίρνουμε όρια και έχουμε :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu x+x\right)=3\cdot 0+0=0$$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$,έχουμε :

$$f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

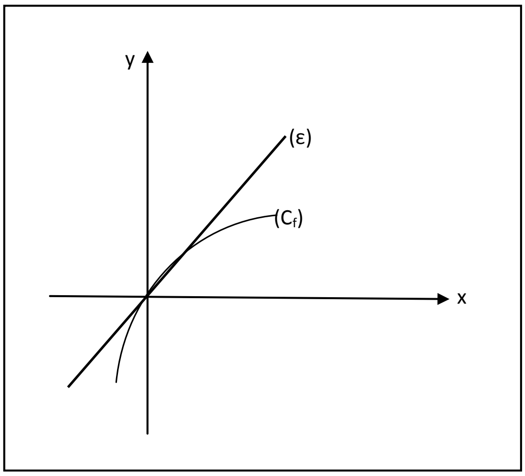
ii) Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)\eta\mu x+x}{x}=g(x)\frac{\eta\mu x}{x}+1 ,$$

οπότε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=3\cdot 1+1=4.$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=4$



iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$,οπότε η C_f έχει εφαπτόμενη στο σημείο $A(0,f(0))$

με εξίσωση :

$y-f(0)=f(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=4(x-0)\Leftrightarrow y=4x$

2.

i) Έστω η f δεν είναι γνησίως αύξουσα ,τότε ως γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ζεύγος $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2$ είναι και

$f(x_1)>f(x_2)$ (1) άρα και $2f(x_1)>2f(x_2)$

Με πρόσθεση παίρνουμε $2f(x_1)-x_1>2f(x_2)-x_2\Rightarrow f(f(x_1))>f(f(x_2))\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

που είναι άτοπο λόγω της (1)

ii) Είναι $f(0)=0$ (2)

Η εξίσωση $f(x)=-x\Leftrightarrow f(x)+x=0$ και θέτοντας $g(x)=f(x)+x$ παρατηρούμε ότι

$g(0)=f(0)+0=0$.

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε η λύση $x=0$ είναι μοναδική.

iii) Η f ως συνεχής στο R θα είναι και στο $[1,7]$ και από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής θα δέχεται μέγιστο και ελάχιστο σε αυτό,έστω E,M αντίστοιχα.

Επίσης και η συνάρτηση $(fof)(x)=f(f(x))$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών .

Είναι :

$$E\le f(x)\le M \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(E)\le f(f(x))\le f(M)\Rightarrow E'\le f(f(x))\le M'\Rightarrow E'\le 2f(x)-x\le M'$$

όπου E',M' είναι το ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα ,της γν. αύξουσας συνάρτησης $f(f(x))$ και έτσι έχουμε :

$$E\le f(2)\le M \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(E)\le f(f(2))\le f(M)\Rightarrow E'\le f(f(2))\le M'\Rightarrow E'\le 2f(2)-2\le M'$$

$$E\le f(4)\le M \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}\ldots\ E'\le f(f(4))\le M'\Rightarrow E'\le 2f(4)-4\le M'\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}3E'\le 6f(4)-12\le 3M'$$

$$E\le f(7)\le M \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}\ldots\ E'\le f(f(7))\le M'\Rightarrow E'\le 2f(7)-7\le M'\overset{\cdot 6}{\Rightarrow}6E'\le 12f(7)-42\le 6M'$$

και με πρόσθεση παίρνουμε

$$10E'\le 2f(2)-2+6f(4)-12+12f(4)-42\le 10M'\Rightarrow E'\le \frac{2f(2)+6f(4)+12f(7)-56}{10}\le M'$$

Η f ως συνεχής ,λόγω ΘΕΤ θα παίρνει την ενδιάμεση τιμή $\dfrac{2f(2)+6f(4)+12f(7)-56}{10}$.

Δηλαδή θα υπάρχει $x_0\in(1,7)$,που λόγω μονοτονίας είναι μοναδικό ,ώστε

$$f(x_0)=\frac{2f(2)+6f(4)+12f(7)-56}{10}\Leftrightarrow 10f(x_0)+56=2f(2)+6f(4)+12f(7)$$

iv) Για $x\ne 0$ έχουμε :

$$f(f(x))=2f(x)-x\Leftrightarrow \frac{f(f(x))}{x}=\frac{2f(x)-x}{x}\Leftrightarrow \frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}=2\frac{f(x)}{x}-1$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\dfrac{f(x)}{x}-1\right]\quad(2)$

Όμως είναι :

- $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\overset{f(x)=y}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(y)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y-0}\overset{\upsilon\pi o\theta}{=}f'(0)\in R$ και από την σχέση (2) προκύπτει

: $f'(0)\cdot f'(0)=2f'(0)-1\Leftrightarrow (f'(0))^2-2f'(0)+1=0\Leftrightarrow (f'(0)-1)^2=0\Leftrightarrow f'(0)=0$

3.

(Α) Είναι $|f(x)|=\left|x^5συν\frac{1}{x}\right|=|x|^5\cdot\left|συν\frac{1}{x}\right|\le|x|^5$ οπότε $-|x|^5\le f(x)\le|x|^5$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to0}\left(-|x|^5\right)=\lim\limits_{x\to0}|x|^5=0$ από ΚΠ θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$ και κατά

συνέπεια η f θα είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x\ne0$ είναι $λ(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^5συν\frac{1}{x}-0}{x}=x^4συν\dfrac{1}{x}$ και

$|λ(x)|=\left|x^4συν\frac{1}{x}\right|=|x|^4\cdot\left|συν\frac{1}{x}\right|\le|x|^4$ οπότε $-|x|^4\le λ(x)\le|x|^4$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to0}\left(-|x|^4\right)=\lim\limits_{x\to0}|x|^4=0$ από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}λ(x)=0$

(Β) Για $x\ne0$ είναι :

$$f'(x)=\left(x^5συν\frac{1}{x}\right)'=5x^4συν\frac{1}{x}+x^5\left(-ημ\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'\right)=3x^4συν\frac{1}{x}-x^3ημ\frac{1}{x}$$

και κατά συνέπεια είναι $f'(x)=\begin{cases}3x^4συν\frac{1}{x}-x^3ημ\frac{1}{x} & αν\ \ x\ne0\\ 0 & αν\ \ x=0\end{cases}$

Για $x\ne0$ είναι $λ'(x)=\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{3x^4συν\frac{1}{x}-x^3ημ\frac{1}{x}}{x}=3x^3συν\dfrac{1}{x}-x^2ημ\dfrac{1}{x}$ και

$|λ'(x)|=\left|3x^3συν\frac{1}{x}-x^2ημ\frac{1}{x}\right|\le\left|3x^3συν\frac{1}{x}\right|+\left|x^2ημ\frac{1}{x}\right|\le\left|3x^3\right|+\left|x^2\right|$ οπότε

$-\left|3x^3\right|-\left|x^2\right|\le λ'(x)\le\left|3x^3\right|+\left|x^2\right|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to0}\left(-|x|^4\right)=\lim\limits_{x\to0}|x|^4=0$ και από κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}λ'(x)=0$ και

$$f''(x)=\left(3x^4συν\frac{1}{x}-x^3ημ\frac{1}{x}\right)'=\left(3x^4συν\frac{1}{x}\right)'-\left(x^3ημ\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=\left(12x^3συν\frac{1}{x}+3x^4ημ\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)-\left(3x^2ημ\frac{1}{x}+x^3συν\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=12x^3συν\frac{1}{x}-3x^2ημ\frac{1}{x}-3x^2ημ\frac{1}{x}+xσυν\frac{1}{x}$$

και κατά συνέπεια είναι

$$f''(x)=\begin{cases}12x^3συν\frac{1}{x}-3x^2ημ\frac{1}{x}-3x^2ημ\frac{1}{x}+xσυν\frac{1}{x} & αν\ \ x\ne0\\ 0 & αν\ \ x=0\end{cases}$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R .

(Γ) i) Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.Άρα

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right]=f(x)-2f(x)+f(x)=0$$

ii) Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}-\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[2\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}-\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right]=2f''(x)-f''(x)=f''(x)$$

4.

Α) Από την δοσμένη σχέση $f'(f(x))+f(x)=0\ \ (1)$ για $x=2$ παίρνουμε

$f'(f(2))+f(2)=0\Leftrightarrow f'(3)+3=0\Leftrightarrow f'(3)=-3\ \ (2)$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=3$ με τον άξονα $x'x$,τότε είναι $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_\varepsilon=f'(3)=-3<0$,οπότε η ω είναι αμβλεία γωνία

Β) Η εξίσωση γράφεται $\frac{x}{2}=f'(x)\Leftrightarrow 2f'(x)-x=0$,οπότε

θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=2f'(x)-x$ και έχουμε :

- Η g είναι συνεχής στο R ,άρα και στο $[2,3]$.
- Είναι $g(2)=2f'(2)-2=2\cdot 3-2=4>0$ και $g(3)=2f'(3)-2=2\cdot(-3)-2=-8<0$,

άρα και $g(2)g(3)<0$,οπότε από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι ότι η εξίσωση

$g(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}=f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

Γ) i) Λόγω υπόθεσης θα έχουμε $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=3$

Θέτουμε $\frac{f(x)-3}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)-3=(x-2)g(x)$ (3)

Είναι ακόμη $\lim_{x\to 2}g(x)=3$ και $\lim_{X\to 2}f(x)=3$ (4)

Έχουμε $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-3)(f(x)+3)}{(x-2)(x-1)}\overset{(3)}{=}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)g(x)(f(x)+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)(f(x)+3)}{x-1}\overset{(4)}{=}\frac{3\cdot(3+3)}{0-1}=-18$$

ii) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+f(x)}-2}{f(x)-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{1+f(x)}-2\right)\left(\sqrt{1+f(x)}+2\right)}{(f(x)-3)\left(\sqrt{1+f(x)}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{(f(x)-3)\left(\sqrt{1+f(x)}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{1+f(x)}+2}=\frac{1}{4}$$

iii) $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{\eta\mu(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{\eta\mu(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}{\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}}=\frac{f'(3)}{1}=-3$$

5.

A) Για τα όρια έχουμε :

i) $$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{f(x)}=\frac{2\cdot 0-3}{f(0)}=\frac{-3}{1}=-3$$

γιατί η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής ,οπότε

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$

ii) Θέτουμε $u=\frac{x\eta\mu x+2}{x^2}$,οπότε $\lim_{x\to\infty}u=\lim_{x\to\infty}\frac{x\eta\mu x+2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0+0=0$

αφού $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και με ΚΠ παίρνουμε ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

Το ζητούμενο όριο γράφεται :

$$\lim_{x\to+\infty}g\left(\frac{x\eta\mu x+2}{x^2}\right)=\lim_{u\to 0}g(u)=g(0)\overset{(1)}{=}f(0)+\frac{2\cdot 0-3}{f(0)}=-2\quad(2).$$

Και αυτό γιατί η g ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής ,οπότε $\lim_{u\to 0}g(u)=g(0)$.

B) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$,άρα και συνεχής ,οπότε θα ισχύουν :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\overset{(\upsilon\pi o\theta)}{=}1 \text{ και } \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1\quad(3)$$

Είναι :

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{2x-3}{f(x)}+2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f^2(x)+2f(x)-3\right)+2x}{xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f^2(x)+2f(x)-3}{xf(x)}+\frac{2x}{xf(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(f(x)-1)(f(x)+3)}{xf(x)}+\frac{2}{f(x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}\cdot\frac{f(x)+3}{f(x)}+\frac{2}{f(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{f(x)+3}{f(x)}+\frac{2}{f(x)}\right]$$

$$=f'(0)\cdot\frac{f(0)+3}{f(0)}+\frac{2}{f(0)}=1\cdot\frac{1+3}{1}+\frac{2}{1}=6$$

Γ) Η εξίσωση $g(x)=0$ λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα :

$$g(x)=f(x)+\frac{2x-3}{f(x)}=0\quad(3)$$

⌊ Η g ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,άρα και στο $[0,3]$.

⌊ Είναι $g(0) \overset{(2)}{=} -2<0$ και $g(3)=f(3)+\dfrac{2\cdot 3-3}{f(3)}=f(3)+\dfrac{3}{f(3)}>0$ αφού $f(x)>0$

άρα και $g(0)g(3)<0$,οπότε από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,3)\subset \mathbb{R}$.

σχόλιο

Η δοσμένη συνθήκη από την υπόθεση ότι $f(x)>0$ δεν είναι απαραίτητη.Από την σχέση (3) μπορούμε να πάρουμε και άλλη ισοδύναμη εξίσωση .

$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+\dfrac{2x-3}{f(x)}=0 \Leftrightarrow f^2(x)+2x-3=0$ και εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την $h(x)=f^2(x)+2x-3$ στο $[0,2]$ή $[0,3]$ή και σε άλλα διαστήματα προκύπτει απλά το συμπέρασμα.

Η συνθήκη $f(x)>0$ δόθηκε για να έχει ο λύτης μεγαλύτερη ευελιξία στην λύση .

Δ) Για το όριο έχουμε : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+2}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{g'(0)}{1}\overset{(B)}{=}6$

6.

Α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη .

i) Με παραγώγιση στην σχέση (1) έχουμε

$$\left(f^3(x)-2f^2(x)+3f(x)\right)'=\left(x^2-2x\right)' \Rightarrow 3f^2(x)f'(x)-4f(x)f'(x)+3f'(x)=2x-2$$

$$\Rightarrow \left(3f^2(x)-4f(x)+3\right)f'(x)=2x-2 \qquad (2)$$

Όμως $3f^2(x)-4f(x)+3>0$,αφού $\Delta=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 3=-20<0$,οπότε από την (2) προκύπτει ότι

$$f'(x)=\frac{2x-2}{3f^2(x)-4f(x)+3} \qquad (3)$$

οπότε :

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-2>0 \Leftrightarrow x>1 \quad \text{και} \quad f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x-2<0 \Leftrightarrow x<1$$

ii) για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln\dfrac{f'(x)}{x^2+e^x}$

$$\frac{f'(x)}{x^2+e^x}>0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$$

Άρα $A_g = (1,+\infty)$

Β) Για την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$

Θέτουμε στην σχέση (1) όπου x=0 και παίρνουμε

$$f^3(0) - 2f^2(0) + 3f(0) = 0^2 - 2\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0) - 2f(0) + 3\right) = 0 \overset{f^2(0)-2f(0)+3\neq 0}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$$

Θέτουμε επίσης στην σχέση (3) όπου x=0 και παίρνουμε

$$f'(0) = \frac{2\cdot 0 - 2}{3f^2(0) - 4f(0) + 3} \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{2}{3}$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

Γ) Για το όριο έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{\eta\mu 2x} \overset{:x}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+x}{\frac{\eta\mu 2x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+x}{2\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}} = \frac{f'(0)+0}{2\cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

7.

Α. Είναι $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{\upsilon\pi o\theta}{=} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha xh + h^2 + f(x) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha xh + h^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{(\alpha x + h)h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(\alpha x + h) = \alpha x$,δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R και

$$f'(x) = \alpha x\,,\; x\in R \quad (2)$$

Β. Στην δοσμένη σχέση (1) θέτουμε $x = y = 1$ και παίρνουμε

$f(1+1) = \alpha\cdot 1\cdot 1 + 1^2 + f(1) \Leftrightarrow f(2) = \alpha + 1 + f(1) \Leftrightarrow 2 = \alpha + 1 - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Έτσι από την σχέση (2) παίρνουμε $f'(x) = 2x\,,\, x\in R$.

Φανερά η f θα είναι της μορφής $f(x) = x^2 + c \;\; (3)\;,\, x\in R$

Όμως $f(1) \overset{(3)}{=} 1^2 + c \overset{\upsilon\pi o\vartheta}{=} -1 \Leftrightarrow c = -2$ και από την (3) παίρνουμε $f(x) = x^2 - 2$.

Γ. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{f'(x)} - e^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{2x} - e^2}{x-1} \quad (4)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{2x}$ και το όριο (4) παίρνει την μορφή

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 2e^2 \text{,αφού } g'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g'(1) = 2e^2$$

Δ.Αφού η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: y = (2\lambda+1)x - 3$ θα έχουμε $f'(1) = \lambda_\delta \Leftrightarrow f'(1) = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow 2 = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

8.

A. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f(x)+x^2\right]=(+\infty)(+\infty)+\infty=+\infty$

γιατί :

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{4}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ και

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

B. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και

$$g'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)' f(x)+\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f'(x)+\left(x^2\right)'=$$

$$=(x^3+7)f(x)+\left(\frac{x^4}{4}+7x+1\right)f'(x)+2x$$

οπότε $g'(0)=7f(0)+f'(0)$ (2)

Όμως η συνάρτηση f είναι άρτια οπότε θα είναι $f(-x)=f(x)$ $x\in R$,άρα και

$(f(-x))'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)$ και για $x=0$ γράφεται

$$-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0.$$

Άρα από (2)$\Leftrightarrow$ $g'(0)=7f(0)$ δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $\psi-7f(0)x+3=0$.

9.

A. $f(x)=e^{\lambda x}$ οπότε $f'(x)=\left(e^{(\lambda-2)x}\right)'=e^{(\lambda-2)x}\left((\lambda-2)x\right)'=(\lambda-2)e^{(\lambda-2)x}>0$ για $\lambda>2$

B. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ είναι:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{(\lambda-2)x_0}=(\lambda-2)e^{\lambda x_0}(x-x_0)$ (1)

Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα την επαληθεύει:

$0-e^{(\lambda-2)x_0}=(\lambda-2)e^{(\lambda-2)x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow -e^{(\lambda-2)x_0}=-(\lambda-2)x_0e^{(\lambda-2)x_0}\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda-2}$

Το σημείο επαφής είναι: $M\left(\frac{1}{\lambda-2},\ f\left(\frac{1}{\lambda-2}\right)\right)=\left(\frac{1}{\lambda-2},e\right)$ και η (1) γράφεται:

$y-e=(\lambda-2)e\left(x-\frac{1}{\lambda-2}\right)\Leftrightarrow \psi=(\lambda-2)ex$

10.

A. Το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g=(0,+\infty)$.

Για το όριο έχουμε απροσδιοριστία $0\cdot\infty$ και επιδιώκουμε με ανάλυση του κλάσματος σε άρση ή σε άλλη μορφή απροσδιοριστίας.

Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\ln(x+1)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x}\cdot\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\overset{\frac{0}{-\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{-x}\cdot\ln(x+1)\cdot\frac{1}{\ln x}=1\cdot 0\cdot 0=0$$

Β. Για την παράγωγο της συνάρτησης έχουμε

$$h'(x)=\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{-\ln x}{e^{-x}}\right)'=\left(-e^{x}\ln x\right)'=\left(-e^{x}\right)'\ln x+\left(-e^{x}\right)(\ln x)'=-e^{x}\ln x+\left(-e^{x}\right)\frac{1}{x}$$

Άρα $h'(x)=-e^{x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

Γ. Έστω τώρα $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta \ (1)$ είναι η κοινή εφαπτόμενη των C_f , C_g .

Είναι ακόμη $f'(x)=-e^{-x}$ και $g'(x)=-\frac{1}{x}$.

Έστω ακόμη $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ είναι τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) και των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g αντίστοιχα .

Η κοινή εφαπτομένη ,αφού εφάπτεται σε δύο γραφικές παραστάσεις ,έχει εξισώσεις :

↳ $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-e^{-x_1}=-e^{-x_1}(x-x_1)\Leftrightarrow y=-e^{-x_1}x+(x_1+1)e^{-x_1}$

↳ $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y+\ln x_2=-\frac{1}{x_2}(x-x_2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{x_2}x+(1-\ln x_2)$

Από τα παραπάνω ,λόγω της (1) προκύπτει :

$$\begin{cases}\alpha=-e^{-x_1}=-\dfrac{1}{x_2}\\ \beta=(x_1+1)e^{-x_1}=1-\ln x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=e^{x_1}\\ (x_1+1)e^{-x_1}=1-\ln e^{x_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=e^{x_1} & (2)\\ (x_1+1)e^{-x_1}=1-x_1 & (3)\end{cases}$$

Από την (3) παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα είναι η $x_1=0$ και από την (2) παίρνουμε $x_2=e^0=1$. Οπότε και

$$\begin{cases}\alpha=-e^{0}=-1\\ \beta=1-\ln 1=1\end{cases}\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-x+1 \text{ η κοινή εφαπτόμενη .}$$

11.

Α) Για $x\neq 1$ έχουμε $f(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$.

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ,άρα και στο $x=1$ και έτσι έχουμε :

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DlH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{1}=1$$ και έτσι παίρνουμε

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ 1 & ,\ x=1\end{cases}\ /.$$

$B)$ Για την εύρεση του $f'(1)$ χρησιμοποιούμε ορισμό παραγώγου και έτσι :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}-1}{x-1}\overset{\cdot(x-1)}{=}\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1-x+1}{(x-1)^2}\underset{DlH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}\underset{DlH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}}{2x}=\frac{1}{2}$$

Για τα όριο έχουμε : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

$\Gamma)$ Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτόμενης είναι :

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow 2y-x=1\ .$$

$\Delta)$ Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x-1)\ln(x-1)\ln f(x)\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}\cdot\ln f(x)\right]$.

Όμως :

- $$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=-\lim_{x\to1^+}(x-1)=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to1^+}\left[\ln f(x)\right]\overset{\substack{f(x)=u\\(A)\\u\to1}}{=}\lim_{u\to1}u=0$$,οπότε παίρνουμε :Όριο= $0\cdot0=0$

12.

A. φανερά ισχύει $1+e^{x-1}>0$,για κάθε $x\in R$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=R$.

Είναι ακόμη $f(x)=\ln\left(1+e^{x-1}\right)-(x-1)=\ln\left(1+e^{x-1}\right)-\ln e^{x-1}=\ln\dfrac{1+e^{x-1}}{e^{x-1}}$,οπότε και

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{e^{x-1}}+1\right)\qquad(1)$$

Έτσι για $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ παίρνουμε κατά τα γνωστά

$...\ln\left(\dfrac{1}{e^{x_1-1}}+1\right)>\ln\left(\dfrac{1}{e^{x_2-1}}+1\right)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$,δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

B. η f ως γνήσια μονότονη είναι και $1-1$,δηλαδή θα αντιστρέφεται.

Έτσι $A_{f^{-1}}=\Sigma T_f$.

Όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R ,οπότε :

$$\Sigma T_f=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)\qquad(2)$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{x-1}\right)-x+1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{e^{-x+1}}\right)-x+1\right] = +\infty$,αφού :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^{-x+1}}\right) \overset{\left(\substack{1+\frac{1}{e^{-x+1}}=u \\ u\to1}\right)}{=} \ln1=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{e^{x-1}}+1\right)\right] \overset{\left(\substack{\frac{1}{e^{x-1}}+1=u \\ u\to1}\right)}{=} \ln1=0$ και από την (2) παίρνουμε $\Sigma T_f = (0,+\infty)$

Γ. η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$e^{f(-4f'(x))} > \frac{e+1}{e} \Leftrightarrow \ln e^{f(-4f'(x))} > \ln\frac{e+1}{e} \Leftrightarrow f\left(-4f'(x)\right) > f(2)$$

$$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} -4f'(x) < 2 \Leftrightarrow f'(x) > -\frac{1}{2} \quad (3)$$

Όμως $f'(x) = \left[\ln\left(1+e^{x-1}\right)-x+1\right]' = \frac{1}{1+e^{x-1}}\left(1+e^{x-1}\right)' - x' = \frac{e^{x-1}}{1+e^{x-1}} - 1 = -\frac{1}{1+e^{x-1}}$ και

θεωρώντας $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ παίρνουμε κατά τα γνωστά

$-\frac{1}{1+e^{x_1-1}} < -\frac{1}{1+e^{x_2-1}} \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$,δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Έτσι $(3) \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1.$

Δ. αφού η ευθεία (ε) $y = \kappa x + \lambda + \ln 2$ εφάπτεται της C_f $x_0 = 1$,θα έχουμε :

$$\begin{cases} y(1) = f(1) \\ \lambda_\varepsilon = f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa\cdot1+\lambda+\ln2 = \ln2 \\ \kappa = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa+\lambda = 0 \\ \kappa = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \kappa = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

13.

Α. Η συνάρτηση f έχει φανερά πεδίο ορισμού $A_f = R$ στο οποίο είναι και παραγωγίσιμη.

Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)' - \frac{1}{e^{2x}}\left(e^x\right)' = \frac{2x}{x^2+1} + e^{-x} \quad (1)$$

↳ αν $x \ge 0$ τότε είναι και $f'(x) > 0$,επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

↳ αν $x < 0$ είναι $-x > 0 \Rightarrow e^{-x} > 1$ και άρα

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + e^{-x} > \frac{2x}{x^2+1} + 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \ge 0$ για κάθε $x < 0$,δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Όμως η f είναι συνεχής στο R ,άρα και στο σημείο $x = 0$,οπότε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β. Παρατηρούμε ότι

$f(0)=\ln(1+0^2)+1-\dfrac{1}{e^0}=\ln1+1-1=0$,δηλαδή $x=0$ είναι ρίζα.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,οπότε η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα.

Γ. Λόγω του Β ερωτήματος ,η f ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και έτσι έχουμε :

↳ αν $x\in(-\infty,0)$ τότε $x<0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$ και όμοια

↳ αν $x\in(0,+\infty)$ τότε $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

Για το σύνολο τιμών τώρα ,η f ως συνεχής και γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\quad(2)$$

Όμως

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+x^2)+1-\dfrac{1}{e^x}\right]=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=\begin{pmatrix}x^2+1=y\\ x\to+\infty\Rightarrow y\to+\infty\end{pmatrix}\lim_{y\to+\infty}\ln y=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=1-0=1$$

↳ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(x^2+1)+1-\dfrac{1}{e^x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x\ln(x^2+1)-1}{e^x}+1\right]\quad(3)$

Αλλά :

$$\lim_{x\to-\infty}e^x\ln(x^2+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{e^{-x}}\overset{\text{D.L.H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}(x^2+1)}$$

$$\overset{\text{D.L.H}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{2}{(x^2+1)-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=0\cdot0=0$$

Το όριο λόγω της (3) γράφεται

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(e^x\ln(x^2+1)-1\right)+1\right]=(+\infty)(0-1)+1=-\infty$$

και έτσι από την (2) παίρνουμε σύνολο τιμών το

$$f(A)=(-\infty,+\infty)=R$$

14.

Α. Πολλαπλασιάζουμε την δοσμένη σχέση με $e^{xf(x)}$ και έχουμε

$$xf(x)e^{xf(x)}+x^2f'(x)e^{xf(x)}=x^2+e^{xf(x)}\overset{:x\neq0}{\Rightarrow}f(x)e^{xf(x)}+xf'(x)e^{xf(x)}=x+\frac{e^{xf(x)}}{x}$$

$$\Rightarrow (e^{xf(x)})'=x+\frac{e^{xf(x)}}{x}\quad(1)$$

Θέτουμε $e^{xf(x)} = g(x)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$g'(x) = x + (\frac{1}{x})g(x) \Rightarrow xg'(x) - g(x) = x^2 \Rightarrow (\frac{g(x)}{x})' = (x)' \Rightarrow \frac{g(x)}{x} = x + c \quad (2)$$

Απο την (2) για $x = -1$ παίρνουμε

$\frac{g(-1)}{-1} = -1 + c \Rightarrow -e^{-f(-1)} = c - 1 \Rightarrow -e^0 = c - 1 \Rightarrow c = 0$ και από την (2) παίρνουμε

$$g(x) = x^2 \Rightarrow e^{xf(x)} = x^2 \Rightarrow xf(x) = \ln(x^2) \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x^2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2\ln(-x)}{x} \quad , x < 0 .$$

Β. Η παράγωγος είναι $f'(x) = \frac{2(1 - \ln(-x))}{x^2}$,οπότε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) = 1 \Leftrightarrow n(-x) = \ln e \Leftrightarrow -x = e \Leftrightarrow x = -e$$

και για το πρόσημο της $f'(x)$ λύνουμε την ανίσωση

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) > 0 \Leftrightarrow \ln(-x) < \ln e \Leftrightarrow -x < e \Leftrightarrow x > -e$$

x	**-∞**	**-e**	**+∞**
f ΄(x)	**–**		**+**
f(x)	↘	**οε**	↗

και η μονοτονία της είναι $f \downarrow$ στο $(-\infty, -e]$ και $\uparrow$ στο $[-e, +\infty)$.

Έχει δε ολικό ελάχιστο στο $x = -e$ το $f(-e) = -2/e$

Γ. Θα πρέπει

$$e^\alpha - \alpha - 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta - 2 = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (e^\alpha - \alpha - 1)x \right]$$

Όμως

↳ $e^\alpha - \alpha - 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\ln(-x)}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DH}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και

↳ $\beta - 2 = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (e^\alpha - \alpha - 1)x \right] = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\ln(-x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DH}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

και έτσι παίρνουμε

$$\begin{cases} e^\alpha - \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = \alpha + 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

αφού ως γνωστόν (θέλει απόδειξη) η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$

15.

Α. i) είναι $f(x) \neq \ln x \Rightarrow e^{f(x)} \neq e^{\ln x} \Rightarrow e^{f(x)} \neq x$ άρα $e^{f(x)} - x \neq 0 \quad (1)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}-x$ για την οποία ισχύουν :

▪ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχής ως πράξεις συνεχών ,αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

▪ λόγω της (1) είναι μή μηδενιζόμενη .

Έτσι θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $h(x)=e^{f(0)}-0=1>0$,δηλαδή $h(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}-x}\Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)}-x)=1\Leftrightarrow e^{f(x)}(f'(x)(e^{f(x)}-x))=e^{f(x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(e^{f(x)})^2]'=(xe^{f(x)})'\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{f(x)})^2=xe^{f(x)}+c\ \ (2)\ \text{ με } f(0)=0$$

Από την σχέση (2) με αντικατάσταση $x=0$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}(e^{f(0)})^2=0\cdot e^{f(0)}+c\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{0})^2=+c \text{ δηλαδή } c=\frac{1}{2}$$

Έτσι

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{f(x)})^2=xe^{f(x)}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2=2xe^{f(x)}+1\Leftrightarrow (e^{f(x)}-x)^2=1+x^2$$

$$\Leftrightarrow h^2(x)=1+x^2\overset{h(x)>0}{\Leftrightarrow} h(x)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$ii)$ Έστω η εξίσωση έχει λύση $x_0\in R$.Τότε :

$$x_0+2\sqrt{1+x_0{}^2}=\ln(x_0+\sqrt{x_0{}^2+1})\le x_0+\sqrt{x_0{}^2+1}\Rightarrow \sqrt{1+x_0{}^2}\le 0$$

που βέβαια είναι άτοπο.

Κατά συνέπεια η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

$iii)$ Απο την Άλγεβρα Β Λυκείου (Κεφ. 5) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της $y=\ln x$ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της $y=x$.

Κατά συνέπεια $\ln x<x$ για κάθε $x>0$,άρα και

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)<x+\sqrt{1+x^2}<x\Rightarrow f(x)<x$$

<u>σχόλιο</u>

Αλλιώς το $iii)$ ερώτημα

Είναι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ (δεν θέλει απόδειξη ,ως λυμένη εφαρμογή) ,οπότε

$$\ln x\le x-1<x\Rightarrow \ln x<x \text{ κλπ}$$

Β. Είναι $g(x)=e^{f(x)}=e^{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow g(x)=x+\sqrt{1+x^2}\quad (3)$

$i)$ Για την πλάγια ασύμπτωτη έχουμε

↳ για $x\to+\infty$

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1$

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

κατά συνέπεια η g δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

↳ για $x\to-\infty$ εργαζόμαστε όμοια

ii) είναι $g'(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$

αφού $\sqrt{1+x^2}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0\Rightarrow g'(x)>0$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R .

16.

A. αφού $F'(x)=f(x)$,παραγωγίζοντας δοσμένη σχέση παίρνουμε :

$$F'(1-2x)(1-2x)'+F'(x^2+2)(x^2+2)'=\left(x^4+5x^2+2x\right)'$$
$$\Rightarrow -2F'(1-2x)+2xF'(x^2+2)=4x^3+10x+2$$
$$\Rightarrow -2f(1-2x)+2xf(x^2+2)=4x^3+10x+2\quad(1)$$

▪ με αντικατάσταση στην (1) όπου $x=0$ παίρνουμε

$\Rightarrow -2f(1-2\cdot 0)+2\cdot 0f(0^2+2)=4\cdot 0^3+10\cdot 0+2\Rightarrow f(1)=-1$ και

▪ με αντικατάσταση στην (1) όπου $x=-1$ παίρνουμε

$\Rightarrow -2f(1-2(-1))+2(-1)f((-1)^2+2)=4(-1)^3+10(-1)+2\Rightarrow f(3)=3$

B. η f ως παραγωγίσιμη στο R είναι και συνεχής

i) αρκεί η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μια τουλάχιστο πραγμ. ρίζα .

Όμως για την f έχουμε

▪ είναι συνεχής στο R ,άρα και στο $[1,3]$

▪ $f(1)\cdot f(3)=-1\cdot 3(-6)=-6<0$

οπότε από το Θ Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,3)$ ώστε $f(x_0)=0\quad(2)$

ii) φανερά η f είναι συνεχής στα $[1,x_0]$, $[x_0,3]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,x_0)$, $(x_0,3)$.

Έτσι από το ΘΜΤ υπάρχουν

▪ $\xi_1\in(1,x_0)$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\overset{(i)}{=}\dfrac{0-f(1)}{x_0-1}=\dfrac{-f(1)}{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0-1}$ και

▪ $\xi_2 \in (x_0, 3)$ ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} \overset{(i)}{=} \dfrac{3 - 0}{3 - x_0} = \dfrac{3}{3 - x_0}$

έτσι έχουμε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{x_0 - 1}{1} + \frac{3(3 - x_0)}{3} = x_0 - 1 + 3 - x_0 = 2$$

17.

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

έχει δε παράγωγο $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2} > 0$ για κάθε $x \neq 1$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Όμως η f είναι συνεχής στο R ,οπότε και στο $x_0 = 1$,οπότε

θα είναι γνησίως αύξουσα στο □ .

Ακόμη έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x \cdot \dfrac{1}{x^2+1}\right) = 0 \cdot 0 = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^x\right)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Β. Η f ως γνήσια μονότονη θα είναι και $1-1$.Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f\left(e^{7-x} \cdot (x^2+1)\right) = \frac{e^3}{10} \Leftrightarrow f\left(e^{7-x} \cdot (x^2+1)\right) = f(3) \Leftrightarrow e^{7-x} \cdot \left(x^2+1\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^7}{e^x} \cdot \left(x^2+1\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^7}{3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^7}{3}$$

΄Ομως ο αριθμός $\dfrac{e^7}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, άρα υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \dfrac{e^7}{3}$, ο οποίος είναι μοναδικός, αφού η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

Γ. είναι

$$0<\alpha<\beta \overset{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln\alpha<\ln\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\ln\alpha\right)<f\left(\ln\beta\right) \Rightarrow \frac{e^{\ln\alpha}}{\ln^2\alpha+1}<\frac{e^{\ln\beta}}{\ln^2\beta+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\ln^2\alpha+1}<\frac{\beta}{\ln^2\beta+1} \Rightarrow \frac{\ln^2\beta+1}{\ln^2\alpha+1}<\frac{\beta}{\alpha}$$

18.

Α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\left(0,+\infty\right)$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο $f'(x)=\left(x-1\right)'\cdot\ln x+\left(x-1\right)\cdot\left(\ln x\right)'=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

✎ Επομένως για $0<x<1$ είναι $x-1<0$ και $\ln x<0$, άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0,1\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$.

✎ Ομοίως για $x>1$ είναι $x-1>0$ και $\ln x>0$, άρα $f'(x)>0$, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(1,+\infty\right)$.

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$f\left(\left(0,1\right]\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$, εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Ομοίως είναι $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$.

Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[-1,+\infty\right)$.

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[1,e\right]$με :

$$f\left(1\right)=-1<0 \text{ και } f\left(e\right)=e-2>0.$$

Οπότε από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(1,e\right)$ και ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ,η ρίζα είναι μοναδική .

Γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$x^{x-1}=e^{2015}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2015}\Leftrightarrow\left(x-1\right)\ln x=2015\Leftrightarrow\left(x-1\right)\ln x-1=2015-1\Leftrightarrow f(x)=2014$$

Από το ερώτημα Α έχουμε ότι η f παίρνει κάθε τιμή του διαστήματος $\left[-1,+\infty\right)$ ακριβώς δύο φορές. Επειδή ο αριθμός 2014 ανήκει σε αυτό το διάστημα, η εξίσωση $f(x)=2014$, συνεπώς και η αρχική, έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\left(f(x)-2014\right)$, $x\in\left[x_1,x_2\right]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[x_1,x_2\right]$ και $h(x_1)=2015=h(x_2)$.

Συνεπώς ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για την h, άρα υπάρχει $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$.

Όμως είναι $h'(x)=e^x\left(f(x)-2014\right)+e^xf'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)-2014\right)$, συνεπώς

$h'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2014$.

19.

Α. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(1)<0$.

Είναι $f'(x)=\left[\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]'=...=-\dfrac{1}{x^3}[x+\dfrac{x}{1+x}+2\ln(1+x)]$ (1),οπότε και

$$f'(1)=\ln 4-\frac{3}{2}\ .$$

Όμως $e^3>16\Rightarrow \ln e^3>\ln 4^2\Rightarrow 3>2\ln 4\Rightarrow \ln 4<\dfrac{3}{2}\Rightarrow \ln 4-\dfrac{3}{2}<0\Rightarrow f'(1)<0$

Β.Από (1) έχουμε $f'(x)=-\dfrac{1}{x^3}[x+\dfrac{x}{1+x}+2\ln(1+x)]$

Έστω $h(x)=x+\dfrac{x}{1+x}-2\ln(1+x)$, $x>-1$.

Μια προφανής ρίζα της $h(x)=0$ είναι η $x=0$.

Επίσης $h'(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^2}\geq 0$, για κάθε $x>-1$.

Κατά συνέπεια η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα την $x=0$,άρα η εξίσωση $f'(x)=0$, δεν έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$ και δεδομένου ότι η f' είναι και συνεχής, θα διατηρεί σταθερό το πρόσημό της.

Όμως $f'(1)=\ln 4-\dfrac{3}{2}<0$, άρα $f'(x)<0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και κατά συνέπεια το σύνολο τιμών της είναι : $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)\right)$ $\quad(2)$

Όμως :

➪ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]$ $\quad(3)$ με

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(1+x))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x+2}=0.$$

Οπότε από την σχέση (3) παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

➪ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\ln(1+x))'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x+1)}=\frac{1}{2}$$

Έτσι από την (2) παίρνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Δ. Η εξίσωση $x^2=2015\left(e^{\ln x}-\ln(x+1)\right)$ γράφεται ισοδύναμα :

$$x^2=2015\left(x-\ln(x+1)\right)\Leftrightarrow\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{15}$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και το $\frac{1}{15}\in f(A)$.

Κατά συνέπεια από ΘΕΤ υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$ ώστε $f(x_0)=\frac{1}{15}$.

Είναι δε μοναδικό ,αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

20.

Α. Είναι

$$e^x-e^{f(x)}=e^{x+f(x)}\Leftrightarrow e^x=e^{f(x)}+e^xe^{f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{e^x}{e^x+1}\Leftrightarrow f(x)=x-\ln(1+e^x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\ln e^x-\ln(1+e^x)\Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$$

Β. Είναι $f'(x)=1-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

και $f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Γ. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$(e+1)e^{f(2f'(x))}=e\Leftrightarrow e^{f(2f'(x))}=\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\ln e^{f(2f'(x))}=\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow f(2f'(x))=f(1)$$

Όμως η συνάρτηση f ως γνησίως αύξουσα θα εί ναι και 1-1 ,οπότε από την (1) προκύπτει :

$$f(2f'(x))=f(1)\Leftrightarrow 2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$$

Γιατί η f΄ ως γνησίως φθίνουσα θα είναι και 1-1 .

Δ.Είναι

$$\alpha<\beta\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow\ln\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}<\ln\frac{e^\beta}{1+e^\beta}\Leftrightarrow\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}<\frac{e^\beta}{1+e^\beta}\Leftrightarrow e^\alpha\left(1+e^\beta\right)<e^\beta\left(1+e^\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{e^\alpha}{e^\beta}<\frac{1+e^\alpha}{1+e^\beta}<\frac{1+e^\alpha}{e^\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha-\beta}<\frac{1+e^\alpha}{e^\beta}\Leftrightarrow\ln e^{\alpha-\beta}<\ln\frac{1+e^\alpha}{e^\beta}\Leftrightarrow\alpha-\beta<\ln\frac{1+e^\alpha}{e^\beta}$$

21.

α) Είναι $f'(x)=\left[2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x-2)+\frac{2}{\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x}}[\ln x-2+2]\Rightarrow f'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\right)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

β) Για τις ασύμπτωτες στο $(0,+\infty)$ έχουμε :

✎ Αφού $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$ η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο στο x=0

✎ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\overset{\infty/\infty}{\underset{DH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x\sqrt{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3x}{2\sqrt{x}}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$ και

$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)-0x\right]=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\infty/\infty}{\underset{DH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

Κατά συνέπεια η μόνη ασύμπτωτος είναι η ευθεία $y=0$,δηλαδή ο άξονας $x'x$.

γ) Είναι $f''(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(\ln x)'\sqrt{x}-\ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

✎ το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από το $2-\ln x$.

Έτσι έχουμε $2-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 2\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e^2\Leftrightarrow x\leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
f´	+		-
f´´	κυρτή	ΣΚ	κοίλη

✎ Είναι $f\left(e^2\right)=2\sqrt{e^2}\cdot\left(\ln e^2-2\right)=2e(2-2)=0$ και κατά συνέπεια η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A\left(e^2,0\right)$

δ) Για την εύρεση του συνόλου τιμών ,θα μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

✎ Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$

✎ $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\ln x}{\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow \ln x>\ln 1\Leftrightarrow x>1$

x	0		1		+∞
f′(x)		-	0	+	
f(x)		↘	ολ	↗	

Η f έχει ολικό ελάχιστο ,το $f(1)=2\sqrt{1}\cdot(\ln 1-2)=-4$

↬ για τα $x\in(0,1]$ είναι $f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-4,0)$

Γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

↬ για τα $x\in[1,+\infty)$ είναι $f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-4,+\infty)$

Γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

Κατά συνέπεια το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[-4,0)$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και το $e\in f(A)$.

Κατά συνέπεια από ΘΕΤ υπάρχει $x_0\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_0)=e$.

Είναι δε μοναδικό ,αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

22.

α) Έχουμε f ΄(x)=$\frac{x}{2}$(2lnx-1)+ $\frac{x^2}{4}2\frac{1}{x}$-2(lnx-1)- 2x$\frac{1}{x}$ = xlnx-$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$-2lnx+2-2

= xlnx-2lnx =(x-2)lnx , δηλαδή $f'(x)=(x-2)\ln x$ για κάθε x>0 (1).

β) f ΄(x)=0 ⇔ (x-2)lnx=0 ⇔ (x-2=0 ή lnx=0) ⇔ x=2 ή x=1 . Τα x-2 , lnx είναι ετερόσημα μόνο στην περίπτωση x∈(1 , 2) .Το πρόσημο της f ΄ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	0		1		2		+∞
f ΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (0 ,1) , (2 , +∞) και γνησίως φθίνουσα στο [1 , 2] , ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση 1 το f(1)=$\frac{7}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση 2 το f(2)=3-2ln2 .

γ) Για το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)\right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} 2x(\ln x-1)\left[\frac{x^2(2\ln x-1)}{8x(\ln x-1)}-1\right] \quad (1)$$ Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2x(\ln x-1)\right]=+\infty$$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2\ln x-1)}{8x(\ln x-1)} \underset{DH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x(2\ln x-1)+x^2\frac{2}{x}}{8(\ln x-1)+\frac{8x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x\ln x-2x+2x}{8\ln x-8+8} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x\ln x}{8\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

Οπότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty-1)=+\infty$$

δ) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$\alpha\ln x=\frac{\alpha^2+4}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)\ln x=\frac{\alpha^2+4}{\alpha} \Leftrightarrow f'(x)=\alpha+\frac{4}{\alpha} \quad (2)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και ο αριθμός

$\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\in\left[f(2),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[3-2\ln 2,+\infty)$,γιατί :

✎ $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\ge 4 \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\ge 0$ που ισχύει .

✎ $4>3-2\ln 2 \Leftrightarrow 1+\ln 4>0 \Leftrightarrow \ln e+\ln 4>0 \Leftrightarrow \ln 4e>\ln 1 \Leftrightarrow 4e>1$ που ισχύει φανερά .

Κατά συνέπεια ,από ΘΕΤ ,υπάρχει $x_0\in(2,+\infty)$ ώστε $f'(x_0)=\alpha+\dfrac{4}{\alpha}$ και λόγω μονονίας είναι μοναδικό .

23.

Α. Είναι $h'(x)=2015e^x+\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ (1)

Εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση $f(x)$ Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$.

✎ Η $f(x)$ λόγω υπόθεσης είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ άρα και συνεχής στο $[0,x]$.

✎ Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $(0,x)$.

Κατά συνέπεια από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x} \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x)=xf'(\xi).$$

Κατά συνέπεια η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$h'(x)=2015e^x+\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x^2}=2015e^x+\frac{x\left[f'(x)-f'(\xi)\right]}{x^2} \quad (2)$$

Όμως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε
Για $\xi \in (0,x)$ είναι $0<\xi<x$ οπότε $f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $h'(x)>0$ για κάθε $x>0$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Β. Η εφαπτόμενη έχει εξίσωση :

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=2x\Leftrightarrow y=2x$$

Γ. Για το όριο έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2015e^x+\frac{f(x)}{x}\right)\cdot\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\left(2015e^x+\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\ln x$$

$$=\left(2015e^0+f'(0)\right)\cdot(+\infty)(-\infty)=2017(-\infty)=-\infty$$

24.

Α. Για την εύρεση του πεδίου ορισμού ,πρέπει :

$$\begin{cases}x+1>0\\ x>0\\ \ln x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x>0\\ \ln x\neq \ln 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της είναι $A=(0,1)(1,+\infty)$

Φανερά η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A και η παράγωγος της είναι :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x+1)}{\ln^2 x}\overset{\cdot x(x+1)}{=}\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$$

Για την εύρεση του προσήμου της f' θα εργαστούμε με δύο τρόπους

<u>Α τρόπος</u> (Συνθέτουμε την f' με ανισοτικές σχέσεις που ισχύουν)

✎ Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε :

- $x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln 1\Leftrightarrow \ln x<0\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow} x\ln x<x\cdot 0\Leftrightarrow x\ln x<0\ \ (1)$
- $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow \ln(x+1)>\ln 1\Leftrightarrow \ln(x+1)>0\overset{\cdot(x+1)>0}{\Leftrightarrow}(x+1)\ln(x+1)>0$

$\overset{\cdot(-1)<0}{\Leftrightarrow}$ $-(x+1)\ln(x+1)<0\ \ (2)$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) και παίρνουμε $x\ln x-(x+1)\ln(x+1)<0$

και επειδή $x(x+1)\ln^2 x>0$,εύκολα προκύπτει ότι $f'(x)=\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}<0$,άρα η

f είναι □ στο $(0,1)$.

✎ Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε :

$x<x+1$ και $\ln x<\ln(x+1)$ και με πολ/σμό (αφού είναι όλα θετικά) παίρνουμε

$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)\Leftrightarrow x\ln x-(x+1)\ln(x+1)<0$ οπότε είναι πάλι $f'(x)<0$,άρα η f είναι □ στο $(1,+\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της .

<u>Β τρόπος</u> (Με ΘΜΤ-εμφανίζοντας στην παράγωγο της f τον λόγο ΘΜΤ άλλης συνάρτησης)

Γράφουμε την παράγωγο σε μορφή $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ δηλαδή ΄΄λόγου ΘΜΤ΄΄

$$f'(x)=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}=-\frac{1}{x(x+1)\ln^2 x}\cdot\frac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{(x+1)-x}\quad(3)$$

- Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x\ln x$ και εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο $[x,x+1]$ με $x>1$.Είναι :.

- $g'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$ και $g''(x)=(\ln x+1)'=\dfrac{1}{x}>0$,οπότε g' □

- Φανερά ισχύουν για την g οι 2 προυποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x,x+1]$,οπότε

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x,x+1)$ ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x}=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{(x+1)-x}$.

Όμως $x<\xi<x+1\overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow}g'(x)<g'(\xi)<g'(x+1)\Leftrightarrow g'(x)<\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{(x+1)-x}<g'(x+1)$

και επειδή $x>1$ είναι και $g'(x)>g'(1)=1>0\Rightarrow g'(x)>0$ άρα και $\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{(x+1)-x}>0$,

οπότε από την (3) έχουμε $f'(x)<0$ …………

Για το σύνολο τιμών της f ,αφού είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε κάθε άνα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της θα έχουμε :

$$f(A)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}\right)\cup\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)\quad(4)$$

Για τα όρια τώρα έχουμε :

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x+1)\right]=-\infty$

  γιατί $\ln x<0$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(x+1)=\ln2>0$

- $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x+1)\right]=+\infty$

  γιατί $\ln x>0$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(x+1)=\ln2>0$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x+1)\right]=0$

  γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=\ln1=0$

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln(x+1)\right)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$

Οπότε λόγω της (4) έχουμε ότι $f(A)=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

Β. Για τις ασύμπτωτες της έχουμε :

↳ Από το ερώτημα Α και το όριο $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ προκύπτει ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος .

↳ Είναι ακόμα

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=+\infty$ οπότε η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος .

Γ. Για την απόδειξη της ανισότητας έχουμε :

$1<\alpha<\beta$,οπότε αφού η συνάρτηση είναι στο $(1,+\infty)$ έχουμε και

$$f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow\frac{\ln(\alpha+1)}{\ln\alpha}>\frac{\ln(\beta+1)}{\ln\beta}\overset{\cdot\ln\alpha\ln\beta>0}{\Leftrightarrow}\ln\beta\cdot\ln(\alpha+1)>\ln\alpha\cdot\ln(\beta+1)$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(\alpha+1)^{\ln\beta}>\ln(\beta+1)^{\ln\alpha}\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}(\alpha+1)^{\ln\beta}>(\beta+1)^{\ln\alpha}.$$

Δ. Η εξίσωση γράφεται :

$$\ln(x+1)=\left(\kappa^2+1\right)\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\kappa^2+1\Leftrightarrow f(x)=\kappa^2+1\ \ (5)$$

Όμως η f είναι συνεχής στο A και $\kappa^2+1\in f(A)$ αφού $\kappa^2+1>1$.

Κατά συνέπεια από ΘΕΤ υπάρχει $x_0\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_0)=\kappa^2+1$ και λόγω μονοτονίας είναι μοναδικό.

25.

Α. Η ζητούμενη ανισότητα $f'(x)\le\sqrt{2}f(x)$ ισοδύναμα γράφεται :

$$2x\le\sqrt{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}^2x\le\sqrt{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}x\le x^2+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2-2\sqrt{2}x+1\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}x-1\right)^2\ge0 \text{ που ισχύει για κάθε } x\in R.$$

Β. Η συνάρτηση με $g(x)=e^{-\sqrt{2}x}f(x)$ γράφεται :

$$\text{i) } g(x)=e^{-\sqrt{2}x}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow g'(x)=\left(e^{-\sqrt{2}x}\right)'\left(x^2+\frac{1}{2}\right)+e^{-\sqrt{2}x}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)'$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)+e^{-\sqrt{2}x}\cdot2x\Leftrightarrow g'(x)=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x}\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\right)\le0$$

Αφού $\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x}>0$ και $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\geq 0$ και η ισότητα $g'(x)=0$ ισχύει μόνο για το μεμονωμένο σημείο $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Κατά συνέπεια η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

$ii)$ Είναι $\ln\frac{f(2)}{f(1)}<\sqrt{2}\Leftrightarrow \ln\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}>\ln\frac{9}{3}\Leftrightarrow \sqrt{2}>\ln 3\Leftrightarrow e^{\sqrt{2}}>e^{\ln 3}$

$\Leftrightarrow e^{\sqrt{2}}>3$ που ισχύει γιατί

$$1>0\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(1)<g(0)\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}\cdot 1}\left(1^2+\frac{1}{2}\right)<e^{-\sqrt{2}\cdot 0}\left(0^2+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3e^{-\sqrt{2}}<1$$

$\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{3}\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}}<3^{-1}\Leftrightarrow e^{\sqrt{2}}>3$, εδείχθει.

$iii)$ Για

$$x\geq 0\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}x}f(x)\leq e^{-\sqrt{2}\cdot 0}f(0)\Leftrightarrow e^{-\sqrt{2}x}f(x)\leq f(0)\overset{\cdot e^{\sqrt{2}x}}{\Leftrightarrow}f(x)\leq f(0)e^{\sqrt{2}x}$$

26.

$A.$ φανερά ισχύει $1+e^{x-2}>0$, για κάθε $x\in R$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=R$.

Είναι ακόμη $f(x)=\ln\left(1+e^{x-2}\right)-(x-2)=\ln\left(1+e^{x-2}\right)-\ln e^{x-2}=\ln\frac{1+e^{x-2}}{e^{x-2}}$, οπότε και

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{e^{x-2}}+1\right)\qquad(1)$$

Είναι $f'(x)=\left[\ln\left(1+e^{x-2}\right)-x+2\right]'=\frac{1}{1+e^{x-2}}\left(1+e^{x-2}\right)'-x'=\frac{e^{x-2}}{1+e^{x-2}}-1=-\frac{1}{1+e^{x-2}}<0$

για κάθε $x\in R$. Κατά συνέπεια η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

$B.\ i)$ η f ως γνήσια μονότονη είναι και $1-1$, δηλαδή θα αντιστρέφεται.

Έτσι $A_{f^{-1}}=\Sigma T_f$.

Όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε :

$$\Sigma T_f=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)\qquad(2)$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{x-2}\right)-x+2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{e^{-x+2}}\right)-x+2\right]=+\infty$, αφού :

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^{-x+2}}\right)\overset{\left(\substack{1+\frac{1}{e^{-x+2}}=u\\ u\to 1}\right)}{=}\ln 1=0\ \text{και}\ \lim_{x\to-\infty}(-x+1)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{e^{x-2}}+1\right)\right]\overset{\left(\substack{\frac{1}{e2}+1=u\\ u\to 1}\right)}{=}\ln 1=0$ και από την (2) παίρνουμε $\Sigma T_f=(0,+\infty)$

$ii)$ επειδή η f είναι συνεχής ,για την εξίσωση θα αναζητούμε κάθε φορά ,αν ο αριθμός $1-\ln(\alpha-1)$, $\alpha>1$ ανήκει ή όχι στο $\Sigma T_f=(0,+\infty)$.Έτσι :

- αν $1-\ln(\alpha-1)\le 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1)\ge \ln e \Leftrightarrow \alpha-1\ge e \Leftrightarrow \alpha\ge 1+e$,η εξίσωση είναι αδύνατη .
- αν $1-\ln(\alpha-1)>0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1)>\ln e \Leftrightarrow \alpha-1<e \Leftrightarrow \alpha<1+e \Leftrightarrow \alpha\in(1,1+e)$,η εξίσωση έχει μοναδική λύση ,γιατί :

Ο αριθμός $1-\ln(\alpha-1)\in \Sigma T_f=(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής ,από ΘΕΤ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1-\ln(\alpha-1)$ και επειδή η f ως γνήσια μονότονη ,το x_0 είναι μοναδικό .

$\Gamma.$η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$e^{f(-6f'(x))}<\frac{e+1}{e} \Leftrightarrow \ln e^{f(-6f'(x))}<\ln\frac{e+1}{e} \Leftrightarrow f(-6f'(x))<f(3)$$

$$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} -6f'(x)>2 \Leftrightarrow f'(x)<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x)<f'(3) \qquad (3)$$

Όμως

$$f''(x)=\left[-\frac{1}{1+e^{x-2}}\right]'=\frac{1}{\left(1+e^{x-2}\right)^2}\left(1+e^{x-2}\right)'=\frac{e^{x-2}}{\left(1+e^{x-2}\right)^2}>0 \ , \ x\in R.$$

Κατά συνέπεια η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή) .

Έτσι $(3)\Leftrightarrow f'(x)>f'(2) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x>2$.

$\Delta.$ η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο τυχαίο σημείο x_0 ,έχει κλίση $f'(x_0)$ και επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία (δ) $y=-\frac{1}{2}x+3$ θα ισχύει $f'(x_0)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x_0)=f'(2) \overset{\left(\substack{f'\uparrow \\ f'\ 1-1}\right)}{\Leftrightarrow} x_0=2$.

Έτσι έχουμε (ε) $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-\ln 2=-\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1+\ln 2$.

Για την ανίσωση ,θα αξιοποιήσουμε ότι μας είναι γνωστή η κυρτότητα της f και η εφαπτόμενη της στο $x_0=2$.

Αφού λοιπόν η f είναι κυρτή ,θα ισχύει $f(x)\ge y(x)$,για κάθε $x\in R$.($y(x)$ η εφαπτόμενη).

Έτσι

$$\ln\left(1+e^{x-2}\right)-x+2\ge -\frac{1}{2}x+1+\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{x-2}\right)-\ln 2\ge \frac{x}{2}-1 \Leftrightarrow \ln\frac{1+e^{x-2}}{2}\ge \frac{x-2}{2} \qquad (4).$$

Έτσι η δοσμένη ανίσωση ,λόγω της $(4)\Leftrightarrow \ln\frac{1+e^{x-2}}{2}=\frac{x-2}{2} \Leftrightarrow f(x)=y(x) \Leftrightarrow x_0=2$,

όπου $x_0=2$ το σημείο επαφής .

27.

$A)$ Για το ΠΟ πρέπει $\frac{x-1}{x}>0 \Leftrightarrow (x-1)x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, οπότε

$$A_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

$B)$ Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}>0 \quad x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(1,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα και $\uparrow$,οπότε το σύνολο τιμών της δίνεται από τον τύπο $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\right)\cup\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. (1)

Όμως :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\overset{\left(\substack{1-\frac{1}{x}=u\\ u\to1}\right)}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$
- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\overset{\left(\substack{1-\frac{1}{x}=u\\ u\to+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\dfrac{x-1}{x}=\overset{\left(\substack{\frac{x-1}{x}=u\\ u\to0^+}\right)}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\overset{\left(\substack{1-\frac{1}{x}=u\\ u\to1}\right)}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι

$$f(A)=(0,+\infty)\cup(-\infty,0)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

$\Gamma)$ Για $\alpha>e$ είναι :

$\dfrac{\ln\alpha-1}{\ln\alpha}>e^{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}\Leftrightarrow\ln\dfrac{\ln\alpha-1}{\ln\alpha}>\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\Leftrightarrow f(\ln\alpha)>f(e)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln\alpha>\ln e\Leftrightarrow\alpha>e$,
που ισχύει .

Έτσι λοιπόν για $\alpha,\beta>e$ έχουμε $\dfrac{\ln\alpha-1}{\ln\alpha}>e^{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}$ και $\dfrac{\ln\beta-1}{\ln\beta}>e^{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}$,με πρόσθεση δε

προκύπτει $\dfrac{\ln\alpha-1}{\ln\alpha}+\dfrac{\ln\beta-1}{\ln\beta}>2e^{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

$\Delta)$ Για την κυρτότητα της f έχουμε :

$f''(x)=\left[\dfrac{1}{x(x-1)}\right]'=-\dfrac{1}{x^2(x-1)^2}\left(x(x-1)\right)'=\dfrac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$, οπότε :

$f''(x)>0\Leftrightarrow1-2x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$ και έτσι προφανώς προκύπτει ότι :

- για $x\in(-\infty,0)$ είναι $f''(x)>0$,δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0)$.

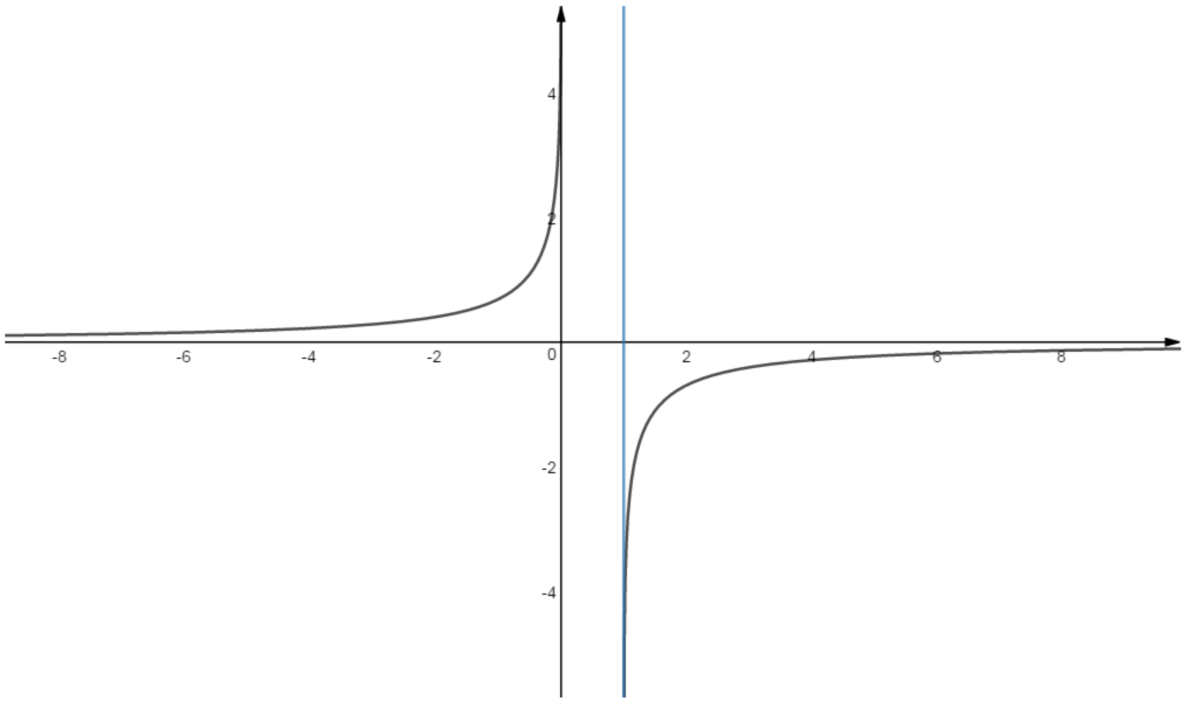
• για $x \in (1,+\infty)$ είναι $f''(x)<0$,δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Για τις ασύμπτωτες τώρα με βάση τα όρια που βρήκαμε στο B) ερώτημα ,προκύπτει ότι :

• η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$ και

• οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$,δηλαδή τον άξονα $x'x$.

Με βάση δε τα παραπάνω έχουμε την παρακάτω πρόχειρη γραφική παράσταση



28.

Α. Για την συνάρτηση f έχουμε :

• το πεδίο ορισμού της είναι φανερά το $A_f = (0,+\infty)$ και

• $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2x-2+\ln x}{4x\sqrt{x}} \quad (1)$$

Όμως $4x\sqrt{x}>0$ για κάθε $x \in A_f$,οπότε είναι προφανές ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από την παράσταση $2x-2+\ln x$ και έτσι θέτουμε $h(x)=2x-2+\ln x, x>0$ με $h(1)=0$, οπότε :

$$h'(x) = 2+\frac{1}{x}>0$$,άρα η h είναι γν. αύξουσα .και έτσι :

↳ για $x>1 \Leftrightarrow h(x)>h(1) \Leftrightarrow 2x-2+\ln x>0$,οπότε (λόγω (1)) και $f'(x)>0$.

↳ αντίστοιχα για $0<x<1 \Leftrightarrow g(x)<g(1) \Leftrightarrow 2x-2+\ln x<0$,οπότε και $f'(x)<0$.

Έτσι προκύπτει το πρόσημο της f' , άρα η f για $x=1$ έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=1$

x	**0**		**1**		**$+\infty$**
f′(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖	↘		↗	

Για την συνάρτηση g έχουμε :

• το πεδίο ορισμού της είναι $A_g = R$ και

• $g'(x) = -2x+2$ οπότε είναι

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x+2>0 \Leftrightarrow x<1$

Έτσι η g για $x=1$ έχει ολικό μέγιστο το $g(1)=1$

x	0	1	+∞
g′(x)	+	0	-
g(x)	↗	0 ο.μ	↘

Β. για το σύνολο τιμών της f παίρνουμε κάθε ένα από τα διαστήματα μονοτονίας της και έτσι

↳ για $x \in (0,1]$ είναι $f(A_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [1,+\infty)$,

$$\text{αφού } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x\right] = 0-(+\infty)(-\infty) = +\infty$$

↳ για $x \in [1,+\infty)$ είναι $f(A_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [1,+\infty)$,γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] = +\infty - 0 = +\infty \text{ , αφού}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ και • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(2\sqrt{x})'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Έτσι για το σύνολο τιμών προκύπτει $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1,+\infty)\cup[1,+\infty) = [1,+\infty)$

Γ. Είναι προφανές ότι εξίσωση $f(x) = \lambda^2 - 6\lambda + 6$ έχει λύση στο R ,όταν ο αριθμός $\lambda^2 - 6\lambda + 6$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f ,δηλαδή αρκεί να ισχύει

$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty,1]\cup[5,+\infty).$$

Δ. Είδαμε στο Α ερώτημα ότι : $f_{min}(x) = 1$,οπότε $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>0$ και έτσι :

• $f(2\alpha-1) \geq 1$, $f(e^{\alpha-1}) \geq 1$,οπότε και $f(2\alpha-1) + f(e^{\alpha-1}) \geq 2$ (2) ,οπότε

• η δοσμένη ανίσωση $f(2\alpha-1)+f(e^{\alpha-1}) \leq 2$,λόγω της (2) γράφεται ισοδύναμα

$f(2\alpha-1)+f(e^{\alpha-1}) = 2$ και ισχύει μόνο όταν :

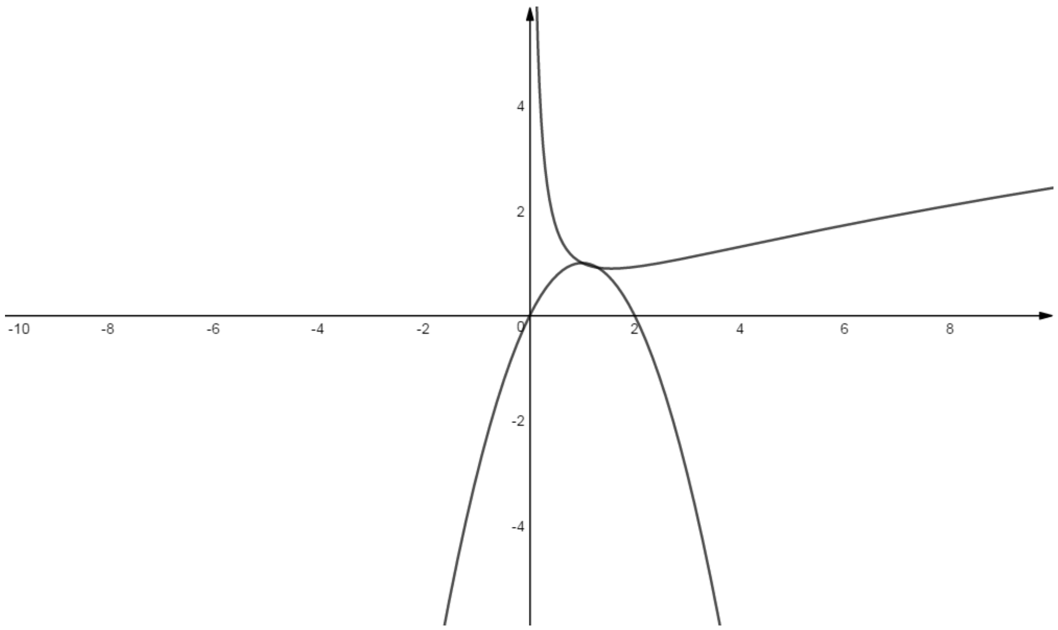
$$\begin{cases} f(2\alpha-1)=1 \\ f(e^{\alpha-1})=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-1=1 \\ e^{\alpha-1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha=2 \\ e^{\alpha-1}=e^0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=1$$

Ε. Ηδοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$1+x\sqrt{x}-2\sqrt{x} = \frac{\ln x}{2x} \Leftrightarrow 2x\left(1+x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right) = \ln x \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x}\cdot x^2 - 4x\sqrt{x} = \ln x$$

$$\Leftrightarrow 2x - \ln x = -2\sqrt{x}\cdot x^2 + 4x\sqrt{x} \overset{:2\sqrt{x}}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = -x^2+2x \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (3)$$

Όμως από το A ερώτημα έχουμε ότι : $f_{min}(x)\ge 1$ και $g_{max}(x)\le 1$ και το ´´$=$´´ ισχύει μόνο για $x_0=1$. Κατά συνέπεια η $(3)\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)=1\Rightarrow x_0=1$.



29.

A. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\left(f(x)=e^{-x}+x-1\right)'=-e^{-x}+1=1-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^x-1}{e^x}$.

Όμως $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το e^x-1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Έτσι : $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$

Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f για $x=0$ έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

Για το πρόσημο της $f(x)$ έχουμε :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x<0\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και

$x>0\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$

B. Για το σύνολο τιμών της f παίρνουμε κάθε ένα από τα διαστήματα μονοτονίας .

↳ για $x\in A_1=(-\infty,0]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα ,οπότε

$f(A_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$,αφού : $f(0)=0$ και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\left(1+xe^x\right)-1\right) = +\infty$$

, εφόσον

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(1+xe^x)=1>0\ ,$$

↳ για $x\in A_2=[0,+\infty)$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα ,οπότε

$$f\left(A_2\right)=\left[f\left(0\right),\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)\right)=\left[0,+\infty\right) \text{ ,αφού : } f\left(0\right)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x-1\right)=+\infty$$

άρα το σύνολο τιμών, είναι $f(A)=\left[0,+\infty\right)$

η εξίσωση γράφεται :

$1+\left(x-1\right)e^x=\left(\alpha-1\right)e^x\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}e^{-x}+x-1=\alpha-1\Leftrightarrow f(x)=\alpha-1$,οπότε :

• αν $\alpha<1\Leftrightarrow\alpha-1<0\Leftrightarrow\alpha-1\notin f\left(A\right)$,οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη .

• αν $\alpha=1\Leftrightarrow\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha-1\in f\left(A\right)$ η εξίσωση γράφεται $f(x)=0$

και έχει μοναδική λύση την $x=0$

• αν $\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0\Leftrightarrow\alpha-1\in f\left(A\right)$,οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις

εφόσον $\alpha-1\in f(A_1)$, $\alpha-1\in f(A_2)$ και σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2 η f είναι γνησίως μονότονη .

$\Gamma.$ θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$ και έχουμε

$g'(x)=-1+x+e^{-x}=f(x)>0$ από ερώτημα A ,άρα g□ .

Έτσι για $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow 1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}>0\Leftrightarrow 1-x+\dfrac{x^2}{2}>e^{-x}$

$\Delta.$ Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f\left(x\right)=f\left(x^2\right)+\ln x\Leftrightarrow f(x)-f\left(x^2\right)=\ln x$

• παρατηρούμε ότι η η $x=1$ είναι προφανής λύση

• αν $x>1$ τότε $\ln x>0$, $x^2>x>1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x^2)>f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(x^2)<0$, αδύνατη

• αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0$, $0<x^2<x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x^2)<f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(x^2)>0$, αδύνατη εφόσον τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι ετερόσημοι αριθμοί .

Κατά συνέπεια η $x=1$ είναι μοναδική λύση

30.

Γ1. α. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει : $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}>0 \\ x>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

και κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=(0,+\infty)$

β. Για τον τύπο της συνάρτησης f ,έχουμε :

$$f(x)=e^{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}+\frac{\ln x}{x}=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=x+\frac{1+\ln x}{x} \quad (1)$$

γ. Για την μονοτονία και τα ακρότατα της f ,από την σχέση (1) παρατηρούμε ότι η f είναι φανερά παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,με

$$f'(x)=\left(x+\frac{1+\ln x}{x}\right)'=x'+\frac{(1+\ln x)'x-(1+\ln x)x'}{x^2}=1-\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{x^2-\ln x}{x^2} \quad (2)$$

Από την σχέση (2) παρατηρούμε ότι για τα $x\in(0,+\infty)$,το πρόσημο της $f'(x)$εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=x^2-\ln x \quad (3)$,για την οποία έχουμε ότι :

- $g'(x)=\left(x^2-\ln x\right)'=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$ με $x\in(0,+\infty)$.
- $g'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-1}{x}>0\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}2x^2-1>0\Leftrightarrow|x|^2>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

από όπου και προκύπτει ο πίνακας προσήμων της $g'(x)$.

x	0		$1/\sqrt{2}$		+∞
g΄		−	0	+	
g		↘	τ.ε.	↗	

- όμως η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και επειδή έχει ένα τοπικό ακρότατο ,θα είναι και ολικό.
  Κατά συνέπεια η συνάρτηση g ,έχει **ολικό ελάχιστο** το :

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}>0$$

Γιατί $\sqrt{2}>1 \overset{(y=\ln x \nearrow)}{\Rightarrow} \ln\sqrt{2}>\ln 1 \Rightarrow \ln\sqrt{2}>0$,οπότε και $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}>0$

- Οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$,είναι $g(x)\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0 \Rightarrow g(x)>0$,οπότε λόγω

των $(2),(3)$ προκύπτει ότι $f'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$ και κατά συνέπεια

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Γ2. Για την συνάρτηση h έχουμε :

$$h(x)=x^2 f'(x)=x^2\cdot\frac{x^2-\ln x}{x^2}=x^2-\ln x=g(x)\ ,\ x\in(0,+\infty)\ (3)$$

- Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η g έχει ολικό ελάχιστο ,οπότε λόγω (3) είναι :

$$h_{min}(x)=g_{min}(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-\ln x\right)=0-(-\infty)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)$ (4). Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\infty/\infty}{=}}\begin{pmatrix}\text{Οι συναρτήσεις}\\ y=\ln x\ ,\ y=x^2\ \text{είναι}\\ \text{συνεχείς και παραγωγίσιμες}\end{pmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

οπότε από την (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=(+\infty)(1-0)=+\infty$

x	0	$1/\sqrt{2}$	+∞
h΄(x)	-		+
h(x)	$+\infty$	ο.ε $\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$

Από την συνέχεια της h στο $(0,+\infty)$ και τα παραπάνω ,προκύπτει ότι

το σύνολο τιμών της h είναι : $\Sigma T_h=h(A)=\left[\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}\ ,+\infty\right)$ (5)

Γ3. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,οπότε για να έχει η εξίσωση

$$h(x)=\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}$$

μια τουλάχιστο λύση στο $(0,+\infty)$,για κάθε πραγματικό αριθμό κ , αρκεί ο αριθμός $\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}$ (λόγω ΘΕΤ),να είναι τιμή της $h(x)$,δηλαδή να ανήκει στο σύνολο τιμών της.

Είναι $\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}\in R$,αφού $\kappa^2+\kappa+1>0$

($\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$)

Οπότε λόγω της (5) αρκεί :

$$\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}+\ln\sqrt{2}\geq\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\kappa^2+\kappa+1}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\kappa^2+\kappa+1\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$4\kappa^2+4\kappa+3\geq 0$ που ισχύει για κάθε $\kappa\in R$,αφού $\Delta=4^2-4\cdot4\cdot3=-32<0$.

Κατά συνέπεια εδείχθει το ζητούμενο.

Γ4. Για το ζητούμενο όριο έχουμε :

- $x^3 f'(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=xf'(x)\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ (6),οπότε :

$$\lim_{x\to\infty}xf'(x)=\lim_{x\to\infty}x\frac{x^2-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\ln x}{x}\begin{pmatrix}\text{οι συναρτήσεις}\\ y=x^2-\ln x\ \ ,\ y=x\ \text{είναι}\\ \text{συνεχείς και παραγωγίσιμες}\end{pmatrix}$$

και έχουμε απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$,αφού από **Γ3** ερώτημα και σχέση (4), είναι $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\ln x\right)=+\infty$,οπότε από τον κανόνα De L Hospital παίρνουμε

- $\lim_{x\to\infty}xf'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\ln x}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\ln x\right)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{1}{x}}{1}=+\infty$

- για το όριο $\lim_{x\to\infty}\left(x^3\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$, θέτοντας

$u=\frac{1}{x}$,είναι για $x\to+\infty\Rightarrow u\to0^+$, τότε γράφεται

$$\lim_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u^3}\eta\mu u-\frac{1}{u^2}\sigma\upsilon\nu u\right)=\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u-u\sigma\upsilon\nu u}{u^3}\overset{DLH}{=}\lim_{u\to0^+}\frac{\left(\eta\mu u-u\sigma\upsilon\nu u\right)'}{\left(u^3\right)'}=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-\sigma\upsilon\nu u+u\eta\mu u}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{u\eta\mu u}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{3u}=\frac{1}{3}\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}$$

Οπότε από την (6) και τα παραπάνω όρια προκύπτει ότι

$$x^3 f'(x)\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3}(+\infty)=+\infty$$

σημείωμα για υποψηφίους

Φίλοι μαθητές.
Μην περιμένετε από τις όποιες υποδείξεις ,μεθόδους και κόλπα να μάθετε, αν δεν διαβάσετε την αντίστοιχη θεωρία και δεν την εμπεδώσετε. Προσοχή λοιπόν στην μελέτη του 1^{ου} κεφαλαίου
Όχι απλοί θεατές, αλλά πρωταγωνιστές !

Τα μαθηματικά θέλουν γνώση και ...φαντασία. Η φαντασία είναι έμφυτη, η γνώση και η τακτική αποκτιέται.

Α. ...λίγο πριν λύσουμε μια άσκηση ας έχουμε υπόψη τα εξής

Μια άσκηση μαθηματικών λύνεται εφόσον έχουμε τις απαραίτητες γνώσεις, το θάρρος και την ικανότητα **να δημιουργούμε** μόνοι μας την λύση της. Αυτή **η ικανότητα δεν είναι έμφυτη…**

- **αφήνουμε** τα δεδομένα και τα ζητούμενα της άσκησης να μας οδηγήσουν.
- **ερμηνεύουμε** σωστά τα δεδομένα και τα ζητούμενα
- **συσχετίζουμε** τα δεδομένα και τα ζητούμενα με τις γνώσεις τις οποίες έχουμε.
- **εφαρμόζουμε** διάφορες τεχνικές, αρκεί αυτές να συμφωνούν με τη λογική μας.
- **ελέγχουμε** τα αποτελέσματα. Είναι φυσικό να κάνουμε κάποια λάθη τα οποία πρέπει να **αναζητάμε** και να τα **διορθώνουμε**.
- **Προσέχουμε** κάποια κρυφά σημεία των δεδομένων – ζητούμενων.
- Σε καμιά περίπτωση **δεν δεχόμαστε** ότι δεν μπορούμε να λύσουμε την άσκηση.

Β. Για να λύσουμε μια άσκηση:

- **Πολλοί λένε: "Από πού να αρχίσω;" Μα φυσικά από αυτά που ζητάς.**
  Ζητάς έναν αριθμό; Βάφτισε τον x. Ζητάς ένα σημείο; Βάφτισε το $M(x_o,y_o)$, ζητάς μία ευθεία;
  Βάφτισε την $y=\lambda x+\beta$ κ.λ.π.

- **Ανακαλύψτε τα δεδομένα της άσκησης που δεν φαίνονται με την πρώτη ματιά.**

α. Εντοπίζουμε σε ποιο θεώρημα...κολλάει. Όλες οι ασκήσεις αναφέρονται κάπου. Εντόπισε το.

β. Ελέγχουμε αν η ζητούμενη πρόταση μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη της !

γ. Εργαζόμαστε στην υπόθεση και στο συμπέρασμα και καταλήγουμε σε ίδιο αποτέλεσμα.

δ. Μετασχηματίζουμε την πρόταση που μας ζητούν και καταλήγουμε σε πρόταση που ισχύει.

ε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει και καταλήγουμε σε άτοπο.

στ. Μήπως στηρίζεται στο προηγούμενο ερώτημα;

ζ. **Ζωγραφίζουμε** τα δεδομένα αν είναι δυνατόν.

Καλή επιτυχία.

Υ Γ

Θα είναι χαρά μας να μας υποδείξετε τα όποια λάθη στα βιβλιομαθήματα και να κάνετε τις όποιες παρατηρήσεις - υποδείξεις σχετικά με την προετοιμασία σας ή ότι άλλο εσείς νομίζετε .

Βαγγέλης Α Νικολακάκης

vaggelisnikolakakis@hotmail.com

vagnik53@gmail.com

www.cutemaths.wordpress.com