Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων 2021

με λύσεις

ΕΚΔΟΣΗ Μπάρλας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{ο}$ ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

6. Παραγοντοποίηση

1 Θέμα 2 – 1251

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$

Λύση

α. Είναι:
- $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta$.
- $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$

β. Για $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ έχουμε $\Pi=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\dfrac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta\cdot5\gamma-\beta\gamma}=\dfrac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

2 Θέμα 2 – 14473

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$

Λύση

α. Είναι $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$

β. Για $y=2x$ έχουμε

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3\cdot(2x)^2+x\cdot2x}{x\cdot2x}=\frac{2x^2+3\cdot4x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

3 Θέμα 2 – 13088

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $A=x^2$.

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B=2\cdot2022^2-2020^2-6\cdot2021-1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

Λύση

α. Έχουμε: $A=2(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)-6xy-y^2=x^2$

β. Ο αριθμός B είναι η αριθμητική τιμή της παράστασης A για $x=2021$ και $y=1$.

Οπότε $B=2021^2$, επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

4 Θέμα 2 – 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

β. Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$$

Λύση

α. i. Από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=0$, προκύπτει ότι $\beta+\gamma=-\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha$$

β. Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\beta^2}{-\beta}=-\beta$ και $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\dfrac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma$

Επομένως, $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

που είναι το ζητούμενο.

5 Θέμα 2 – 12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$.

β. $\alpha=\beta$.

Λύση

α. Έχουμε $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4 \Leftrightarrow \alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}+\beta\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\beta\cdot\dfrac{1}{\beta}=4 \Leftrightarrow 1+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=4 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$.

β. Είναι $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

6 Θέμα 2 – 1318 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

7. Διάταξη πραγματικών αριθμών

7 Θέμα 2 – 12922

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\alpha^2+\beta^2$ και $B=2\alpha\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $A=0$.

β. Να αποδείξετε ότι $A-B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A-B=0$.

Λύση

α. Είναι $A=0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$.

β. Είναι $A-B=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

γ. Είναι $A-B=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$

8 Θέμα 2 – 1287

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α , β .

β. Για ποιες τιμές των α , β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $K\geq\Lambda\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2+(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

β. Είναι $K=\Lambda\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}\alpha^2+(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$.
Άρα $\alpha=\beta=0$.

9 Θέμα 2 – 1353

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x , y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x , y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

Λύση

α. Είναι $(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2x+1+y^2+6y+9=x^2+y^2-2x+6y+10$

β. Έχουμε $x^2+y^2-2x+6y+10\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+(y+3)^2=0\Leftrightarrow x-1=0$ και $y+3=0\Leftrightarrow x=1$ και $y=-3$.
Άρα $x=1$ και $y=-3$.

10 Θέμα 2 – 13323

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x , y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17$$

β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

Λύση

α. Είναι $(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β. $x^2+y^2-2x+8y+17=0\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)^2+(y+4)^2=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0$ και
$(y+4)^2=0\Leftrightarrow x-1=0$ και $y+4=0\Leftrightarrow x=1$ και $y=-4$.

11 Θέμα 2 – 1317

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α , β .

γ. Για ποιες τιμές των α , β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι: **α.** $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3-\beta) = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta$

$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β. $K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ. $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ και $\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$ και $\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \beta = -3$ και $\alpha = 3$

Άρα $\beta = -3$ και $\alpha = 3$.

12 Θέμα 2 – 13266

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta+1)^2 - 1$, με $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha+2)^2 + 1$.

β. i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Λύση

α. Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 2^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = A$$

β. i. Είναι $A + B \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)^2 + 1 + (2\beta+1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)^2 + (2\beta+1)^2 \geq 0$,

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα **β.i.** βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$(\alpha+2)^2 + (2\beta+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \{(\alpha+2)^2 = 0$ και $(2\beta+1)^2 = 0\} \Leftrightarrow (\alpha = -2$ και $\beta = -\frac{1}{2})$.

13 Θέμα 2 – 14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x + y$ **β. $2x - 3y$** **γ. $\frac{x}{y}$**

Λύση

α. Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$ και βρίσκουμε

$$2 + 1 \leq x + y \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x + y \leq 5$$

β. Είναι:

- $2 \leq x \leq 3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 2 \leq 2x \leq 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6$, (1)
- $1 \leq y \leq 2 \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} (-3)\cdot 1 \geq -3y \geq (-3)\cdot 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$4 - 6 \leq 2x - 3y \leq 6 - 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 3y \leq 3$$

γ. Είναι:

- $2 \leq x \leq 3$, (3)
- $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$, (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) έχουμε $2\cdot\frac{1}{2} \leq x\cdot\frac{1}{y} \leq 3\cdot 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$.

14 Θέμα 2 – 1324

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3\le x\le 5$ και $-2\le y\le -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $y-x$ **β.** x^2+y^2

Λύση

α. Είναι:
- $3\le x\le 5 \Rightarrow -3\ge -x\ge -5 \Rightarrow -5\le -x\le -3$, (1)
- $-2\le y\le -1$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$-5-2\le -x+y\le -3-1 \Leftrightarrow -7\le y-x\le -4$

β. Είναι
- $3\le x\le 5 \Rightarrow 9\le x^2\le 25$, (3)
- $-2\le y\le -1 \Rightarrow 2\ge -y\ge 1 \Rightarrow 2^2\ge (-y)^2\ge 1^2 \Rightarrow 1\le y^2\le 4$, (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (3) και (4) και έχουμε

$$9+1\le x^2+y^2\le 25+4 \Leftrightarrow 10\le x^2+y^2\le 29$$

15 Θέμα 2 – 1314 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

16 Θέμα 2 – 12673

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α. **Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3}{\beta}<\dfrac{3}{\alpha}$.**

β. **Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\dfrac{3}{\beta}<\beta^3+\dfrac{3}{\alpha}$.**

Λύση

α. Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta} \Rightarrow \dfrac{3}{\alpha}>\dfrac{3}{\beta} \Rightarrow \dfrac{3}{\beta}<\dfrac{3}{\alpha}$.

β. Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3<\beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα **α.** είναι $\dfrac{3}{\beta}<\dfrac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε: $\alpha^3+\dfrac{3}{\beta}<\beta^3+\dfrac{3}{\alpha}$.

17 Θέμα 2 – 1352 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

18 Θέμα 2 – 1373

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha>0$ και $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\ge 4$ **β.** $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\ge 16$

Λύση

α. Είναι $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\ge 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha\cdot\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\ge 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+4\ge 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2\ge 0$, που ισχύει.

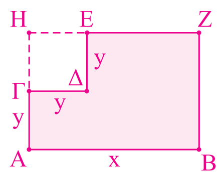
β. Από το **α.** ερώτημα έχουμε $\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\ge 4$ και $\beta+\dfrac{4}{\beta}\ge 4$.

Πολλαπλασιάζουμε τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη και προκύπτει $\left(\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta+\dfrac{4}{\beta}\right)\ge 16$.

19 Θέμα 2 – 1298 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

20 Θέμα 2 – 1261

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .



α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Λύση

α. Είναι:
- $EZ = HZ - HE = AB - \Gamma\Delta = x - y$
- $ZB = HA = H\Gamma + \Gamma A = E\Delta + \Gamma A = y + y = 2y$

Οπότε η περίμετρος του σχήματος είναι

$$\Pi = EZ + ZB + BA + A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E = x - y + 2y + x + y + y + y = 2x + 4y$$

β. Είναι:
- $5 < x < 8 \Leftrightarrow 2\cdot 5 < 2x < 2\cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$, (1)
- $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4\cdot 1 < 4y < 4\cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

8. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

21 Θέμα 2 – 1300

α. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$\mathbf{B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|}$$

Λύση

α. Είναι $x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 4 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 > 0$, που ισχύει.

$2^{ος}$ τρόπος (μετά το κεφάλαιο 19)

Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Επειδή επιπλέον $\alpha = 1 > 0$ έχουμε $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Είναι:
- $x^2 + 4x + 5 > 0$, οπότε $|x^2 + 4x + 5| = x^2 + 4x + 5$
- $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$, οπότε $|x^2 + 4x + 4| = x^2 + 4x + 4$

Άρα $B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 = 1$.

22 Θέμα 2 – 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α. να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$.

Λύση

α. Έχουμε $5 < x < 10 \Rightarrow x > 5$ και $x < 10 \Rightarrow x - 5 > 0$ και $x - 10 < 0$.

Οπότε $|x-5| = x - 5$ και $|x - 10| = -(x - 10) = -x + 10$.

β. $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10} = \dfrac{x-5}{x-5} + \dfrac{-(x-10)}{x-10} = 1 - 1 = 0$

23 Θέμα 2 – 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α. Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β. Να δείξετε ότι: $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

Λύση

α. Είναι $2 \le \alpha \le 3$ οπότε $\alpha - 3 \le 0$ και άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \le \beta \le -1$ οπότε $\beta + 2 \ge 0$ και άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β. Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$ έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ. Από το **β.** ερώτημα έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :
$|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1$

24 Θέμα 2 – 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \le x \le 5$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $x - 5 \le 0 < x - 2$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

Λύση

α. Αφού $3 \le x \le 5$, θα έχουμε $x - 5 \le 0$.

Ακόμα $3 \le x$, οπότε $1 \le x - 2$. Ώστε $x - 2 > 0$.

β. Γνωρίζουμε ότι αν $y \ge 0$, τότε $|y| = y$ ενώ αν $y \le 0$, τότε $|y| = -y$.

Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$.

Τελικά $x = \dfrac{9}{2}$, λύση η οποία είναι δεκτή, αφού $\dfrac{9}{2} = 4{,}5 \in [3\,,\,5]$.

25 Θέμα 2 – 1239

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι

i. για κάθε $x \ge 2$, $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x \ge 2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

Λύση

Είναι $A = |3x - 6| + 2 = |3(x - 2)| + 2 = 3|x - 2| + 2$.

α. i. Για $x \ge 2 \Leftrightarrow x - 2 \ge 0$, είναι $|x - 2| = x - 2$, οπότε

$$A = 3(x - 2) + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$$

ii. Για $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$, είναι $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, οπότε

$$A = 3(-x + 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = 8 - 3x$$

β. Για $x \ge 2$, είναι $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} \overset{\alpha.}{=} \dfrac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 4} = \dfrac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x - 4} = 3x + 4$

26 Θέμα 2 – 1260

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

α. Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$.

β. Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Λύση

α. Έχουμε $1<x<2 \Rightarrow x>1$ και $x<2 \Rightarrow x-1>0$ και $x-2<0$.
Οπότε $|x-1|=x-1$ και $|x-2|=-(x-2)=-x+2$.
Άρα $A=|x-1|-|x-2|=x-1-(-x+2)=2x-3$.

β. Αν $x<1$, τότε:

- $x-1<0$, οπότε $|x-1|=-(x-1)=1-x$.
- $x<2 \Rightarrow x-2<0$, οπότε $|x-2|=-(x-2)=2-x$.

Άρα $A=|x-1|-|x-2|=1-x-(2-x)=1-x-2+x=-1$, δηλαδή έχει σταθερή τιμή.

27 Θέμα 2 – 1384

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x , y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A=x-y+2$

β. $0<A<4$

Λύση

α. Έχουμε:
- $x>1 \Rightarrow x-1>0$, άρα $|x-1|=x-1$
- $y<3 \Rightarrow y-3<0$, άρα $|y<3|=-(y-3)=-y+3$.

Επομένως $A=|x-1|+|y-3| =x-1+(-y+3)=x-y+2$.

β. Έχουμε $1<x<4$, (1) και $2<y<3 \Leftrightarrow -2>-y>-3 \Leftrightarrow -3<-y<-2$, (2)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $1-3<x-y<4-2 \Leftrightarrow -2<x-y<2 \Rightarrow 0<x-y+2<4$.
Άρα $0<A<4$.

28 Θέμα 2 – 1303

Δίνονται οι παραστάσεις:
$A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

β. Υπάρχει $x\in[2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι $A=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$.

α. Για $2\le x<3$, έχουμε: $x\ge 2$ και $x<3$, $x-2\ge 0$ και $x-3<0$, οπότε

- $A=2|x-2|=2(x-2)$
- $B=|x-3|=-(x-3)=-x+3$

Άρα $A+B=2(x-2)-x+3=2x-4-x+3=x-1$.

β. Αν $x\in[2, 3) \Leftrightarrow 2\le x<3$, από **α.** ερώτημα είναι $A+B=x-1$.

Οπότε $A+B=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$, απορρίπτεται, αφού $x\in[2, 3)$.
Άρα δεν υπάρχει $x\in[2, 3)$, ώστε να ισχύει $A+B=2$.

29 Θέμα 2 – 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α. Να δείξετε ότι $x \in (-2\,,8)$.

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

γ. Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του *x* που βρήκατε στο β. ερώτημα και B το σύνολο με $B=\{-3\,,-2\,,-1\,,0\,,3\,,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

Λύση

α. $|x-3|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow -2<x<8 \Leftrightarrow x\in(-2,8)$

β. Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(-2,8)$, δηλαδή οι: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

γ. Είναι $A=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $B=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$ οπότε:
$A\cup B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $A\cap B=\{-1,0,3,4\}$.

30 Θέμα 2 – 1272 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

31 Θέμα 2 – 1253 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

32 Θέμα 2 – 1322

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$.

Λύση

α. Είναι $d(x,2)<3 \Leftrightarrow |x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -3+2<x<3+2 \Leftrightarrow -1<x<5$

β. Έχουμε $-1<x<5 \Leftrightarrow x>-1$ και $x<5 \Leftrightarrow x+1>0$ και $x-5<0$.

Άρα $|x+1|=x+1$, $|x-5|=-(x-5)=-x+5$.

Οπότε $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}=\dfrac{x+1-x+5}{3}=\dfrac{6}{3}=2$.

33 Θέμα 2 – 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

Λύση

α. Είναι $|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y\in(1,3)$

β. Έχουμε $y\in(1,3) \Rightarrow 1<y<3 \Rightarrow y>1$ και $y<3 \Rightarrow y-1>0$ και $y-3<0$.

Άρα $|y-1|=y-1$, $|y-3|=-(y-3)=3-y$.

Οπότε $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}=\dfrac{y-1+3-y}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

34 Θέμα 2 – 1284

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$.

β. Αν $\alpha\geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=\big||\alpha+4|-3\big|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Λύση

α. Είναι $|x+4|\geq 3 \Leftrightarrow x+4\geq 3$ ή $x+4\leq -3 \Leftrightarrow x\geq -1$ ή $x\leq -7$

β. Είναι $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+4\geq -1+4 \Leftrightarrow \alpha+4\geq 3$, δηλαδή $\alpha+4>0$.

Άρα $|\alpha+4|=\alpha+4$, οπότε $A=\big||\alpha+4|-3\big|=|\alpha+4-3|=|\alpha+1|$.

Είναι $\alpha\geq -1 \Leftrightarrow \alpha+1\geq 0$, οπότε $A=|\alpha+1|=\alpha+1$.

35 Θέμα 2 – 1342 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

36 Θέμα 2 – 1320

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3)=3-2x$.

α. Να αποδείξετε ότι $x\leq \frac{3}{2}$.

β. Αν $x\leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

Λύση

α. Είναι $d(2x, 3)=3-2x \Leftrightarrow |2x-3|=-(2x-3)$, (1)

Επειδή $|\alpha|=-\alpha \Leftrightarrow \alpha\leq 0$ έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow 2x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{2}$.

β. Είναι $K=\ldots=|2x-3|-2|x-3|$. Έχουμε $x\leq \frac{3}{2}$, οπότε

- $2x\leq 3 \Rightarrow 2x-3\leq 0$, άρα $|2x-3|=-2x+3$
- $x<3 \Rightarrow -x>-3 \Rightarrow 3-x>0$, άρα $|3-x|=3-x$

Επομένως $K=|2x-3|-2|3-x|=-2x+3-2(3-x)=-2x+3-6+2x=-3$.

Άρα είναι ανεξάρτητη του x .

37 Θέμα 2 – 1366

α. Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$.

β. Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2$.

Λύση

α. Για $\alpha<0$ είναι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2 \overset{\cdot\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1\geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0$, που ισχύει.

β. Για $\alpha<0$ είναι $|\alpha|=-\alpha$.

Οπότε $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2 \Leftrightarrow -\alpha-\frac{1}{\alpha}\geq 2 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$, που ισχύει από το **α.** ερώτημα.

38 Θέμα 2 – 1371

α. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \quad (1)$.

β. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2 \geq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$, που ισχύει.

β. Είναι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=2 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} (|\alpha|-|\beta|)^2=0 \Leftrightarrow |\alpha|-|\beta|=0 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

Η ισότητα ισχύει όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

39 Θέμα 2 – 1252

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

Λύση

α. Είναι $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4$

β. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(x+y)$.

Έχουμε:
- $1<x<3 \Leftrightarrow 1\cdot 2<2x<2\cdot 3 \Leftrightarrow 2<2x<6$, (1)
- $2<y<4 \Leftrightarrow 2\cdot 2<2y<2\cdot 4 \Leftrightarrow 4<2y<8$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και προκύπτει

$$2+4<2x+2y<6+8 \Leftrightarrow 6<\Pi<14$$

40 Θέμα 2 – 14491

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1<x<3 \quad \text{και} \quad 2<y<4,$$

τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Λύση

α. Είναι $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4$.

β. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=xy$. Έχουμε $1<x<3$ και $2<y<4$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και προκύπτει $2<xy<12 \Leftrightarrow 2<E<12$.

41 Θέμα 2 – 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y-6| \leq 4$$

α. Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

Λύση

α. Είναι: • $|x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le x\le 5$
• $|y-6|\le 4 \Leftrightarrow -4\le y-6\le 4 \Leftrightarrow 2\le y\le 10$

β. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\cdot 2x+2y = 4x+2y$.

Έχουμε:

- $1\le x\le 5 \Leftrightarrow 1\cdot 4\le 4x\le 5\cdot 4 \Leftrightarrow 4\le 4x\le 20$, (1)
- $2\le y\le 10 \Leftrightarrow 2\cdot 2\le 2y\le 10\cdot 2 \Leftrightarrow 4\le 2y\le 20$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) και έχουμε

$$4+4\le 4x+2y\le 20+20 \Leftrightarrow 8\le \Pi\le 40$$

- Είναι $\Pi=8$, για $x=1$ και $y=2$.

  Οπότε η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου είναι 8.
- Είναι $\Pi=40$, για $x=5$ και $y=10$.

  Οπότε η μέγιστη τιμή της περιμέτρου είναι 40.

42 Θέμα 4 – 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β .

β. Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

Λύση

α. Έχουμε $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, οπότε οι αριθμοί $\alpha-1$ και $1-\beta$ είναι ομόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha-1>0$ και $1-\beta>0 \Rightarrow \alpha>1$ και $\beta<1 \Rightarrow \beta<1<\alpha$
- $\alpha-1<0$ και $1-\beta<0 \Rightarrow \alpha<1$ και $\beta>1 \Rightarrow \alpha<1<\beta$

Άρα σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β. • Αν $\beta<1<\alpha$ τότε: $\begin{cases}1>\beta\\ \alpha>1\\ \beta<\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-\beta>0\\ \alpha-1>0\\ \beta-\alpha<0\end{cases}$, οπότε

- $|1-\beta|=1-\beta$
- $|\alpha-1|=\alpha-1$
- $|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow -(\beta-\alpha)=4 \Leftrightarrow \alpha-\beta=4$, (1)

Άρα $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta \overset{(1)}{=} 4$.

• Αν $\alpha<1<\beta$, τότε: $\begin{cases}\alpha<1\\ 1<\beta\\ \beta>\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-1<0\\ 1-\beta<0\\ \beta-\alpha>0\end{cases}$, οπότε

- $|\alpha-1|=-(\alpha-1)=1-\alpha$
- $|1-\beta|=-(1-\beta)=\beta-1$
- $|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow \beta-\alpha=4$, (2)

Άρα $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha \overset{(2)}{=} 4$.

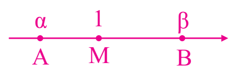
2ος τρόπος

Επειδή οι αριθμοί $\alpha-1$ και $1-\beta$ είναι ομόσημοι έχουμε

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=|(\alpha-1)+(1-\beta)|=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|=4$$

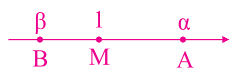
Γεωμετρικά

Έστω $A(\alpha)$, $M(1)$, $B(\beta)$ τα σημεία του άξονα.



Το σημείο M βρίσκεται μεταξύ των A και B , οπότε

$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=d(\alpha,1)+d(1,\beta)=(AM)+(MB)=(AB)=|\alpha-\beta|=4$



Αν $\beta<1<\alpha$, όμοια βρίσκουμε $\kappa=4$.

43 Θέμα 4 – 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

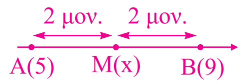
α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β. Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, παραστάσεων

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Λύση



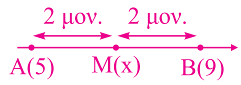
α. Είναι:
- $|x-5|=d(x\,,5)=MA$
- $|x-9|=d(x\,,9)=MB$

Οπότε οι παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-9|$ παριστάνουν τις αποστάσεις του σημείου M από τα σημεία A και B αντίστοιχα.

β. i. Έχουμε $|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow MA=MB$. Δηλαδή το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος AB .

ii. • Το μέσο M του τμήματος AB είναι το κέντρο του διαστήματος $[5, 9]$, οπότε $x=\dfrac{5+9}{2}=7$.

$2^{ος}$ τρόπος



Είναι: $AB=d(5\,,9)=|5-9|=4$ μονάδες.

Επομένως το σημείο M απέχει 2 μονάδες από το σημείο A(5) και 2 μονάδες από το B(9).

Άρα είναι $x=5+2=7$.

- Είναι $|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow x-5=-(x-9)$ ή $x-5=x-9$

  $x-5=-x+9$ ή $x-x=-9+5 \Leftrightarrow 2x=14$ ή $0x=-4 \Leftrightarrow x=7$ ή $0x=-4$, που είναι αδύνατη.

Άρα $x=7$.

44 Θέμα 4 – 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5)\le 9$.

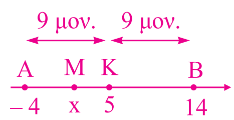
α. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος β. .

δ. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος γ. για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

Λύση



α. Από τη σχέση $d(x, 5)\le 9$ έχουμε ότι ο αριθμός x απέχει από το 5 απόσταση μικρότερη ή ίση του 9 .

β. Αν τα σημεία K , M του άξονα αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , x αντίστοιχα, τότε $d(x, 5)\le 9 \Leftrightarrow (MK)\le 9$

Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι το M ανήκει στο τμήμα AB με $A(-4)$ και $B(14)$. Οπότε $x\in[-4, 14]$.

γ. Είναι $d(x, 5)\le 9 \Leftrightarrow |x-5|\le 9 \Leftrightarrow -9\le x-5\le 9 \Leftrightarrow -9+5\le x\le 9+5 \Leftrightarrow -4\le x\le 14$

δ. Έχουμε $x\ge -4 \Leftrightarrow x+4\ge 0$ και $x\le 14 \Leftrightarrow x-14\le 0$

Οπότε $|x+4|+|x-14|=x+4-(x-14)=x+4-x+14=18$.

45 Θέμα 4 – 1428

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i. $|x+2|$ **ii.** $|x-7|$

β. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|$$

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Λύση

α. i. Είναι $|x+2|=|x-(-2)|=d(x,-2)=MA$. Δηλαδή η παράσταση $|x+2|$ παριστάνει την απόσταση του σημείου M από το A.

ii. Είναι $|x-7|=d(x,7)=MB$.
Δηλαδή η παράσταση $|x-7|$ παριστάνει την απόσταση του σημείου M από το B.

β. Είναι $|x+2|+|x-7|=d(x,-2)+d(x,7)=MA+MB=AB$
Δηλαδή το άθροισμα $|x+2|+|x-7|$ παριστάνει την απόσταση AB.

γ. Είναι $|x+2|+|x-7|=AB=d(7,-2)=|7-(-2)|=|9|=9$

δ. Είναι:
- $x>-2 \Leftrightarrow x+2>0$, άρα $|x+2|=x+2$
- $x<7 \Leftrightarrow x-7<0$ άρα $|x-7|=-(x-7)=7-x$

Οπότε $A=|x+2|+|x-7|=x+2+7-x=9$

46 Θέμα 4 – 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$.

α. i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

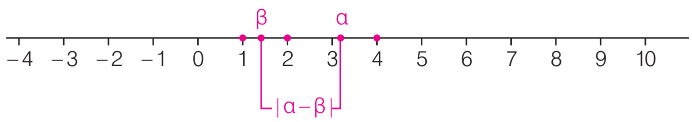
ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β. i. Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}\le 1\le\dfrac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

Λύση

α. Η απόσταση $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha,\beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha,\beta)=3$ όταν $\beta=1$ και $\alpha=4$), δηλαδή $d(\alpha,\beta)\le 3$.

ii. Είναι $1\le\beta\le 2 \Leftrightarrow -1\ge-\beta\ge-2 \Leftrightarrow -2\le-\beta\le-1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2\le\alpha\le 4$, $-2\le-\beta\le-1$ έχουμε ότι $2-2\le\alpha-\beta\le 4-1 \Leftrightarrow 0\le\alpha-\beta\le 3$.

Αφού $0\le\alpha-\beta$ είναι $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta\le 3$ οπότε $d(\alpha,\beta)\le 3$.

β. i. Δεδομένου ότι $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και αφού $\beta \le 2 \le \alpha$ είναι και $\beta \le \alpha$.

Έτσι αφού $\beta \le \alpha$ και $\beta > 0$ έχουμε ότι $1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta \le \alpha$ και $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1-\frac{\beta}{\alpha} \ge 0$ οπότε

$$|1-\frac{\beta}{\alpha}| = 1-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-1 \ge 0 \quad \text{οπότε} \quad |\frac{\alpha}{\beta}-1| = \frac{\alpha}{\beta}-1$$

Συνεπώς

$$|1-\frac{\beta}{\alpha}| = |\frac{\alpha}{\beta}-1| \Leftrightarrow 1-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}-1 \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 0 = (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Όμως $1 \le \beta \le 2 \le \alpha \le 4$, οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

47 Θέμα 4 – 1525

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \le 2$

α. Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

β. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

Λύση

Έχουμε:

α. $|\alpha-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$.

β. $|\beta-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \beta - 3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \beta \le 5$

γ.
- $1 < \alpha < 3 \Rightarrow 2 < 2\alpha < 6$, (1)
- $1 \le \beta \le 5 \Rightarrow -3 \ge -3\beta \ge -15 \Rightarrow -15 \le -3\beta \le -3$, (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε:

$$-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$$

δ.
- $1 < \alpha < 3$, (3)
- $1 \le \beta \le 5 \Rightarrow 1 \ge \frac{1}{\beta} \ge \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{\beta} \le 1$, (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) και (4) και έχουμε: $\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$.

48 Θέμα 4 – 1521

α. **Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.**

β. **Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2 .**

i. **Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14 .**

ii. **Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19 .**

Λύση

α. Είναι $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow 2<x<6$.

β. **i.** Θα αποδείξουμε ότι $2<d(3x,4)<14 \Leftrightarrow 2<|3x-4|<14$, (1)

Έχουμε $d(x,4)<2 \Leftrightarrow |x-4|<2 \Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow 2<3x-4<14$, (2)

Άρα $3x-4>0$ οπότε η $(1) \Leftrightarrow 2<3x-4<14$, που ισχύει από την (2). Άρα $2<d(3x,4)<14$.

ii. Έχουμε $|x-4|<2 \Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow -13<3x-19<-1$, (1), οπότε $3x-19<0$.

Είναι $d(3x,19)=|3x-19|=-(3x-19)=-3x+19$.

Η $(1) \Rightarrow 13>-3x+19>1 \Rightarrow 13>d(3x,19)>1$.

Άρα $1<d(3x,19)<13$.

9. Ρίζες πραγματικών αριθμών

49 Θέμα 2 – 1376

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2}\simeq 1,41 \quad , \quad \sqrt{3}\simeq 1,73 \quad , \quad \sqrt{5}\simeq 2,24 \quad , \quad \sqrt{7}\simeq 2,64$$

α. **Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.**

β. **Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;**

Λύση

α. Είναι:

- $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\simeq 4,48$
- $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}\simeq 6,72$
- $\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}\simeq 8,96$

β. Είναι $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$.

50 Θέμα 2 – 1340

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α. **Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$.**

β. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$.**

Λύση

α. Είναι $A\cdot B=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

β. Είναι $\Pi=A^2+B^2=(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2=2^2-2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=4+3+4+3=14$

51 Θέμα 2 – 12943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ και $\beta=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$.

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$.

Λύση

α. Είναι:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})=\frac{6}{2}=3$$

και

$$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})=\frac{1}{4}(3^2-\sqrt{5}^2)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{4}{4}=1$$

Άρα $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\cdot\beta=1$.

β. Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})^2+\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}(9+5+6\sqrt{5}+9+5-6\sqrt{5})=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

52 Θέμα 2 – 1378

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$.

Λύση

α. Πρέπει: $x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$ και $6-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 6$.
Άρα $4\le x\le 6\Leftrightarrow x\in[4,6]$.

β. Για $x=5$, είναι $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$, οπότε $A^2+A-6=2^2+2-6=0$.

53 Θέμα 2 – 1379

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$.

Λύση

α. Πρέπει: $x^2+4\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4$.
Οπότε η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα $x\in[4,+\infty)$.

β. Για $x=4$, έχουμε $A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}-\sqrt{0}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$.

Οπότε $A^2-A=(2\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}=4\cdot 5-2\sqrt{5}=20-2\sqrt{5}=2(10-\sqrt{5})$.

54 Θέμα 2 – 1375

Δίνεται η παράσταση: $A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Λύση

α. Πρέπει $(x-4\geq 0$ και $x+1\geq 0)\Leftrightarrow(x\geq 4$ και $x\geq -1)\Leftrightarrow x\geq 4$.
Οπότε η παράσταση Α ορίζεται όταν $x\in[4,+\infty)$.
β. Είναι $A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})=(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x+1})^2=x-4-(x+1)=x-4-x-1=-5$.

55 Θέμα 2 – 1270

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α. Είναι $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3}$.
Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:
$x+2\neq 0$ και $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$ και $x\neq 3$.
β. Έχουμε $-2<x<3\Rightarrow x>-2$ και $x<3\Rightarrow x+2>0$ και $x-3<0$.
Άρα $|x+2|=x+2$ και $|x-3|=-(x-3)$.
Οπότε $K=\dfrac{|x+2|}{x+2}-\dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{x+2}{x+2}-\dfrac{-(x-3)}{x-3}=1+1=2$.

56 Θέμα 2 – 1308

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A=4$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$.

Λύση

α. Είναι $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$
$=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{3+5}{5-3}=\dfrac{8}{5-3}=4$
β. Έχουμε $|x+A|=1\Leftrightarrow|x+4|=1\Leftrightarrow x+4=1$ ή $x+4=-1\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=-5$

57 Θέμα 2 – 1381

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

β. Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$.

Λύση

α. Πρέπει: $(x-2)^5\geq 0\Leftrightarrow x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.
Άρα η παράσταση B ορίζεται για εκείνα τα $x\in[2,+\infty)$.
β. Για $x=4$, είναι $B=\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$. Οπότε $B^2+6B=2^2+6\cdot 2=16=2^4=B^4$.

58 Θέμα 2 – 1380

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α. **Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.**

β. **Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$.**

Λύση

α. Πρέπει:
- $1-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq 1$ και
- $x^4\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα $x\in(-\infty, 1]$.

β. Για $x=-3$, έχουμε $A=\sqrt{1+3}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{4}-|-3|=2-3=-1$, οπότε
$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$

59 Θέμα 2 – 1335

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ **και** $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ **, όπου x πραγματικός αριθμός**

α. **Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;**

β. **Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;**

γ. **Να δείξετε ότι, για κάθε $x\leq 2$, ισχύει $A=B$.**

Λύση

α. Πρέπει $(x-2)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε η παράσταση A ορίζεται για $x\in\mathbb{R}$.

β. Πρέπει $(2-x)^3\geq 0 \Leftrightarrow 2-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq 2$. Οπότε η παράσταση B ορίζεται για $x\in(-\infty, 2]$.

γ. Για $x\leq 2$ έχουμε $x-2\leq 0$ και $2-x\geq 0$.

Οπότε $A=|x-2|=-x+2$ και $B=|2-x|=2-x$

Άρα $A=B$.

60 Θέμα 2 – 1377

α. **Να δείξετε ότι:** $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β. **Να συγκρίνετε τους αριθμούς** $\sqrt[3]{30}$ **και** $6-\sqrt[3]{30}$.

Λύση

α. Είναι $3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<(\sqrt[3]{30})^3<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$, που ισχύει.

β. Είναι $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$, αφού

$$\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30}>6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}>3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3>3^3 \Leftrightarrow 30>27$$, που ισχύει.

Άρα $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$.

61 Θέμα 2 – 1382

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ **και** $B=(\sqrt[3]{2})^6$.

α. **Να δείξετε ότι:** $A-B=4$.

β. **Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:** $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$

Λύση

α.
- $A=(\sqrt{2})^6=\left((\sqrt{2})^2\right)^3=2^3=8$
- $B=(\sqrt[3]{2})^6=\left((\sqrt[3]{2})^3\right)^2=2^2=4$

Οπότε $A-B=8-4=4$.

β. Έχουμε: $(\sqrt{2})^6=8$, $(\sqrt[3]{2})^6=4$ και $1^6=1$. Είναι $1<4<8 \Rightarrow 1^6<(\sqrt[3]{2})^6<(\sqrt{2})^6 \Rightarrow 1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$.

62 Θέμα 2 – 1281

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = (\sqrt{2})^6 \ , \quad \mathbf{B} = (\sqrt[3]{3})^6 \ , \quad \mathbf{\Gamma} = (\sqrt[6]{6})^6$$

α. Να δείξετε ότι: $\mathbf{A + B + \Gamma = 23}$

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ **και** $\sqrt[6]{6}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι: • $\mathrm{A} = (\sqrt{2})^6 = \left((\sqrt{2})^2\right)^3 = 2^3 = 8$ • $\mathrm{B} = (\sqrt[3]{3})^6 = \left((\sqrt[3]{3})^3\right)^2 = 3^2 = 9$ • $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6 = 6$

Οπότε $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 23$.

β. Είναι $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.

Οπότε $6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$

63 Θέμα 2 – 1338

Αν είναι $\mathbf{A} = \sqrt[3]{5}$, $\mathbf{B} = \sqrt{3}$, $\mathbf{\Gamma} = \sqrt[6]{5}$, **τότε:**

α. Να αποδείξετε ότι $\mathbf{A \cdot B \cdot \Gamma} = \sqrt{\mathbf{15}}$ **.**

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\mathbf{A}$ **,** $\mathbf{B}$ **.**

Λύση

α. Είναι $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$

β. Είναι: • $\mathrm{A} = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = (5^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{25}$ • $\mathrm{B} = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{27}$

Οπότε $25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow \mathrm{A} < \mathrm{B}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

64 Θέμα 2 – 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$

α. • Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot 2x = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 0x = 6$, αδύνατη.

• Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται $-2 \cdot 0x = 0 \cdot 1 \Leftrightarrow 0x = 0$, ταυτότητα.

β. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση, όταν $(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0$ και $\lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$.

65 Θέμα 2 – 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha - 1| - 3)x = \alpha + 2$ (1) , με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha = 0$ και $\alpha = 5$.

β. i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha - 1| = 3$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β.i.

Λύση

α. Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|0 - 1| - 3) \cdot x = 0 + 2 \Leftrightarrow (1 - 3) \cdot x = 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Για $\alpha = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$(|5 - 1| - 3) \cdot x = 5 + 2 \Leftrightarrow (4 - 3) \cdot x = 7 \Leftrightarrow x = 7$

β. i. Είναι $|\alpha - 1| = 3 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 3$ ή $\alpha - 1 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 4$ ή $\alpha = -2$

ii. Για $\alpha = 4$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|4 - 1| - 3) \cdot x = 4 + 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 6 \text{ , που είναι αδύνατη}$$

Για $\alpha = -2$ η εξίσωση γίνεται: $(|-2 - 1| - 3) \cdot x = -2 + 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, που είναι ταυτότητα.

66 Θέμα 2 – 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \text{ , } \lambda \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, (1)

β. Η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση αν και μόνο αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$.

Για $\lambda \neq 1$ η (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1$. Άρα η μοναδική λύση είναι $x = \lambda + 1$.

γ. Για να είναι ταυτότητα, πρέπει $\lambda - 1 = 0$ και $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ και ($\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$) $\Leftrightarrow \lambda = 1$.

67 Θέμα 2 – 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x-2\lambda+2=0$.

α. i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=-2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Λύση

α. i. Για $\lambda=-2$ η εξίσωση γίνεται $-3x+6=0\Leftrightarrow -3x=-6\Leftrightarrow x=2$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x=2$.

ii. Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται

$$(\lambda-1)1-2\lambda+2=0\Leftrightarrow \lambda-1-2\lambda+2=0\Leftrightarrow -\lambda+1=0\Leftrightarrow \lambda=1$$

β. Για να είναι ταυτότητα η εξίσωση θα είναι της μορφής $0x=0$, οπότε

$\lambda-1=0$ και $2\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=1$ και $2\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=1$

68 Θέμα 2 – 1369

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

Λύση

α.
- Για $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται $(1^2-9)x=1^2-3\cdot1\Leftrightarrow -8x=-2$
- Για $\lambda=3$, η εξίσωση γίνεται $(3^2-9)x=3^2-3\cdot3\Leftrightarrow 0x=0$
- Για $\lambda=0$, η εξίσωση γίνεται $-9x=0$.

β. Η (1) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $\lambda^2-9\neq0\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq3$ και $\lambda\neq-3$

γ. Για $\lambda\neq\pm3$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι

$x=\dfrac{\lambda^2-3\lambda}{\lambda^2-9}=\dfrac{\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}=\dfrac{\lambda}{\lambda+3}$ και ισούται με 4, οπότε

$$x=4\Leftrightarrow\frac{\lambda}{\lambda+3}=4\Leftrightarrow\lambda=4\lambda+12\Leftrightarrow -3\lambda=12\Leftrightarrow\lambda=-4$$

69 Θέμα 2 – 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. όταν $\alpha=1$ **ii. όταν $\alpha=-3$**

β. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Λύση

Είναι $(\alpha+3)x=\alpha^2-9\Leftrightarrow(\alpha+3)x=(\alpha-3)(\alpha+3)$, (1)

α. i. Για $\alpha=1$, η εξίσωση γράφεται $(1+3)x=(1-3)(1+3)\Leftrightarrow 4x=-8\Leftrightarrow x=-2$.

ii. Για $\alpha=-3$, η εξίσωση γράφεται $(-3+3)x=(-3-3)(-3+3)\Leftrightarrow 0x=-6\cdot0\Leftrightarrow 0x=0$, ταυτότητα.

β. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν $\alpha+3\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq-3$.

Για $\alpha\neq-3$, η $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3}\Leftrightarrow x=\alpha-3$.

13. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$

70 Θέμα 2 – 13028

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-2\alpha x-2\alpha-2=0$, με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ (1).

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β. Για $\alpha=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

α. Για $x=3$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha 3^2-2\alpha 3-2\alpha-2=0 \Leftrightarrow 9\alpha-6\alpha-2\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Άρα $\alpha=2$.

β. Στην (1) αντικαθιστούμε το $\alpha=2$ και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=16>0$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 4}{2}$, δηλαδή

$x_1=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{2-4}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3 και -1.

71 Θέμα 2 – 1349

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

β. Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος α. τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$.

Λύση

α. Είναι $|2x-1|=3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=4$ ή $2x=-2 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$

β. Έχουμε $\alpha=-1,\ \beta=2$ και $\gamma=3$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4=12=16>0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2(-1)}=\dfrac{-2\pm 4}{-2}$.

Οπότε $x_1=\dfrac{-2+4}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-2-4}{-2}=\dfrac{-6}{-2}=3$.

Άρα $x=3$ ή $x=-1$

72 Θέμα 2 – 1290

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

β. Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

α. Επειδή η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 1 έχουμε

$$1^2-(\lambda-1)1+6=0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Leftrightarrow 8-\lambda=0 \Leftrightarrow -\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=8$$

β. Για $\lambda=2$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2-x+6=0$, (2).

Η (2) έχει $\alpha=1$, $\beta=-1$ και $\gamma=6$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6=1-24=-23<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

73 Θέμα 2 – 1312 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

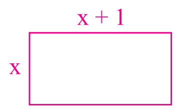
74 Θέμα 2 – 1285

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Λύση



α. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(x+1)+2x = 4x+2$, $x>0$ και το εμβαδόν του

$$E=(x+1)\cdot x = x^2+x \ , \ x>0$$

β. Έχουμε $E=90 \Leftrightarrow x^2+x=90 \Leftrightarrow x^2+x-90=0$.

Είναι $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-90$, οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-90)=361>0$.

Οι ρίζες είναι $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm19}{2}$

$x_1=\dfrac{-1+19}{2}=\dfrac{18}{2}=9$ και $x_2=\dfrac{-1-19}{2}=\dfrac{-20}{2}=-10$, που απορρίπτεται.

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x=9$ μέτρα και $x+1=10$ μέτρα.

75 Θέμα 4 – 1509

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq0$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2+1)^2$.

β. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\dfrac{1}{\alpha}$.

γ. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1-\rho_2|=2$.

Λύση

Είναι:

α. $\Delta=[-(\alpha^2-1)]^2-4\alpha\cdot(-\alpha)=(\alpha^2-1)^2+4\alpha^2=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2$

β. Είναι $\Delta>0$, για κάθε $\alpha\neq0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$\rho_{1,2}=\dfrac{\alpha^2-1\pm\sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1\pm(\alpha^2+1)}{2\alpha}$, οπότε

$\rho_1=\dfrac{\alpha^2-1+(\alpha^2+1)}{2\alpha}=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha}=\alpha$ και $\rho_2=\dfrac{\alpha^2-1-(\alpha^2+1)}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=\dfrac{-2}{2\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}$

γ. Είναι $|\rho_1-\rho_2|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\dfrac{|\alpha^2+1|}{|\alpha|}=2\Leftrightarrow|\alpha^2+1|=2|\alpha|\Leftrightarrow\alpha^2+1=2|\alpha|$

$\Leftrightarrow|\alpha|^2-2|\alpha|+1=0\Leftrightarrow(|\alpha|-1)^2=0\Leftrightarrow|\alpha|-1=0\Leftrightarrow|\alpha|=1\Leftrightarrow\alpha=\pm1$.

76 Θέμα 4 – 13320

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (Ι) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (ΙΙ) όπου α , β , γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha\neq\gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

β. Αν ο αριθμός $\rho\neq0$ είναι ρίζα της (Ι) να δείξετε ότι ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) .

γ. Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (Ι) , (ΙΙ) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Λύση

α. Έστω Δ_1 , Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων (Ι) και (ΙΙ) αντίστοιχα. Τότε

$\Delta_1 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και $\Delta_2 = \beta^2 - 4\gamma\alpha$. Άρα $\Delta_1 = \Delta_2$, που σημαίνει ότι οι εξισώσεις (Ι) και (ΙΙ) ή θα έχουν δύο διαφορετικές λύσεις η κάθε μία αν $\Delta_1 = \Delta_2 > 0$, ή και οι δύο θα είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$ αν $\Delta_1 = \Delta_2 < 0$ ή θα έχουν από μία διπλή ρίζα η κάθε μία, αν $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

β. Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (Ι) θα ισχύει η σχέση $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$ (1).

Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \text{ που ισχύει από την (1).}$$

γ. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (Ι). Τότε θα ισχύει

$$\alpha(\sqrt{2})^2 + \beta\sqrt{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \gamma + \beta\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = -\frac{2\alpha + \gamma}{\beta} \text{ , αφού είναι } \beta \neq 0 \text{ .}$$

Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι πηλίκο ακεραίων, επομένως ρητός, άτοπο.
Ανάλογα, αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρίζα ούτε της εξίσωσης (ΙΙ).

77 Θέμα 4 – 1476

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

i. Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$.

ii. Να δείξετε ότι:
- **$\rho \neq 0$ και**
- **ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$**

Λύση

α. Είναι $\alpha = 2$, $\beta = \lambda$ και $\gamma = -36$ οπότε $\Delta = \lambda^2 - 4\cdot 2\cdot(-36) = \lambda^2 + 288 > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β. Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης έχουμε $2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$, (1).
i. Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης, αν και μόνο αν

$$2(-\rho)^2 - \lambda\cdot(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \text{ , που ισχύει.}$$

ii. • Αν $\rho = 0$, τότε η $(1) \Leftrightarrow 2\cdot 0^2 + \lambda\cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0$, άτοπο. Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$-36x^2 + \lambda x = 2 = 0$ αν και μόνο αν

$$-36\cdot\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\cdot\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \text{ , που ισχύει.}$$

78 Θέμα 4 – 1469

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

Λύση

α. Είναι $\alpha=\lambda$, $\beta=2\lambda-1$ και $\gamma=\lambda-1$, οπότε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda-1)^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda=1$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(2\lambda-1)\pm\sqrt{1}}{2\cdot\lambda}=\frac{1-2\lambda\pm1}{2\lambda}$$

Οπότε $x=\frac{1-2\lambda+1}{2\lambda}=\frac{2-2\lambda}{2\lambda}=\frac{2(1-\lambda)}{2\lambda}=\frac{1-\lambda}{\lambda}$ και $x=\frac{1-2\lambda-1}{2\lambda}=\frac{-2\lambda}{2\lambda}=-1$.

γ. Η απόσταση των ριζών είναι ίση με 2, όταν $d(x_1,x_2)=2\Leftrightarrow|x_2-x_1|=2\Leftrightarrow\left|-1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\lambda}\right|=2\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}=2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda}=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda=-\frac{1}{2} .$$

79 Θέμα 4 – 1459

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \quad (1)$$

α. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i. να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .

ii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

Λύση

α. Αντικαθιστούμε στη σχέση $x=-5$ και έχουμε

$$\lambda=(2(-5)+5)^2-8\cdot(-5)=(-10+5)^2+40=(-5)^2+40=25+40=65$$

β. Αντικαθιστούμε στη σχέση $\lambda=20$ και έχουμε

$$20=(2x+5)^2-8x\Leftrightarrow20=4x^2+20x+25-8x\Leftrightarrow4x^2+12x+5=0$$

Είναι $\alpha=4$, $\beta=12$ και $\gamma=5$ οπότε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=12^2-4\cdot4\cdot5=144-80=64>0$.

Οι ρίζες είναι $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm8}{8}$.

Οπότε $x=\frac{-12+8}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ και $x=\frac{-12-8}{8}=\frac{-20}{8}=-\frac{5}{2}$.

γ. i. Είναι $\lambda=(2x+5)^2-8x\Leftrightarrow\lambda=4x^2+20x+25-8x\Leftrightarrow4x^2+12x+(25-\lambda)=0$, (2) .

Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να είναι $\lambda=5$. Από την (2) έχουμε:

$4x^2+12x+(25-5)=0\Leftrightarrow4x^2+12x+20=0\Leftrightarrow x^2+3x+5=0$, που είναι αδύνατη αφού έχει $\Delta=-11<0$, άτοπο. Άρα $\lambda\neq5$.

ii. Οι δυνατές τιμές του λ είναι οι τιμές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε πρέπει:

$\Delta\geq0\Leftrightarrow12^2-4\cdot4\cdot(25-\lambda)\geq0\Leftrightarrow144-400+16\lambda\geq0\Leftrightarrow16\lambda\geq256\Leftrightarrow\lambda\geq16$.

80 Θέμα 4 – 1456 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

81 Θέμα 4 – 1452

α. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β, για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) .

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

Λύση

α. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -3$ και $\gamma = -4$, οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25 > 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ και $x_2 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

β. Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) , αν και μόνο αν $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\dfrac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} - \dfrac{3\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$, που ισχύει.

ii. Επειδή ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) και οι λύσεις της (1) είναι $x_1 = 4$ και $x_2 = -1$ έχουμε

$\dfrac{\alpha}{\beta} = 4$ ή $\dfrac{\alpha}{\beta} = -1$.

Οπότε:
- $\alpha = -\beta$, αδύνατο αφού οι α , β είναι ομόσημοι.
- $\alpha = 4\beta$

Άρα ο α είναι τετραπλάσιος του β .

82 Θέμα 4 – 1417

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

β. Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1) , να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

Λύση

α. Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x^2 + 2(-1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

β. i. Για $\lambda \neq 0$ η (1) είναι η εξίσωση 2ου βαθμού με $\alpha = \lambda$, $\beta = 2(\lambda - 1)$ και $\gamma = \lambda - 2$.
Οπότε $\Delta = [2(\lambda-1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot(\lambda - 2) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4 > 0$.

Άρα η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Είναι $x_{1,2} = \dfrac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda + 2 \pm 2}{2\lambda}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{-2\lambda + 2 - 2}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} = -1$ και $x_2 = \dfrac{-2\lambda + 2 + 2}{2\lambda} = \dfrac{-\lambda + 2}{\lambda} = -1 + \dfrac{2}{\lambda}$.

ii. Για $\lambda \neq 0$ είναι $|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \left|-1 + \dfrac{2}{\lambda} + 1\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow 2 > |\lambda| \Leftrightarrow |\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$

Άρα $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

83 Θέμα 4 – 12940 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

84 Θέμα 4 – 1516

α. Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2 - 14x + 8 = 0$, **(1)** **και** $8x^2 - 14x + 3 = 0$, **(2)**

β. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4), \text{ με } \alpha \cdot \gamma \neq 0 .$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$ **, τότε**

i. $\rho \neq 0$ **και**

ii. ο $\dfrac{1}{\rho}$ **επαληθεύει την εξίσωση (4) .**

Λύση

α. • Η εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$, έχει $\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$ και ρίζες τις

$x_{1,2} = \dfrac{14 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \dfrac{14 \pm 10}{6}$, οπότε $x = \dfrac{24}{6} = 4$ ή $x = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

• Η εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$, έχει

$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{14 \pm 10}{16}$, οπότε $x = \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2}$ ή $x = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

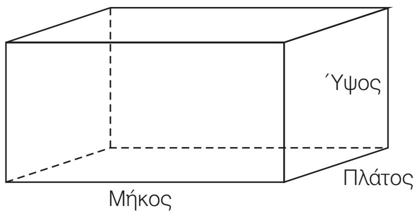
β. i. Αν $\rho = 0$, τότε $\alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$.

ii. Επειδή ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) έχουμε $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$.

Για $x = \dfrac{1}{\rho}$ η (4) γίνεται

$$\gamma \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \text{ , που ισχύει.}$$

85 Θέμα 4 – 12683



Η δεξαμενή του διπλανού σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α. Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

β. Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

γ. Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

Λύση

α. Έστω x το μήκος και το πλάτος της δεξαμενής, οπότε το ύψος της θα είναι $\dfrac{x}{4}$. Ο όγκος της δεξαμενής V είναι: $V = x \cdot x \cdot \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^3}{4}$.

Έχουμε $V = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = 4$ m.

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος 4m και ύψος 1 m.

β. Έστω $x, (x>0)$ το μήκος της δεξαμενής. Τότε το πλάτος της θα είναι $x-2$ και ο όγκος της δεξαμενής θα ισούται με $V=2x(x-2)$. Οπότε έχουμε:

$$V=16 \Leftrightarrow 2x(x-2)=16 \Leftrightarrow x(x-2)=8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

Είναι $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36>0$.

Οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm6}{2} \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$, που απορρίπτεται.

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ. Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του υγρού μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του υγρού θα είναι:

$$V_{\pi\epsilon\tau\rho.}=10 \Leftrightarrow 4\cdot2\cdot x=10 \Leftrightarrow 8\cdot x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{8} \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\ m$$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4}$ m.

14. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq0$

86 Θέμα 2 – 1348

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$.

Λύση

α. Είναι $\alpha=1$, $\beta=-2\lambda$ και $\gamma=4(\lambda-1)$ και

$$\Delta=4\lambda^2-16(\lambda-1)=4\lambda^2-16\lambda+16=4(\lambda^2-4\lambda+4)=4(\lambda-2)^2$$

β. Επειδή $\Delta=4(\lambda-2)^2\geq0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

- $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-2\lambda}{1}=2\lambda$
- $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{4(\lambda-1)}{1}=4(\lambda-1)=4\lambda-4$

Οπότε $x_1+x_2=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow 2\lambda=4\lambda-4 \Leftrightarrow 4=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=2$.

87 Θέμα 2 – 1359

α. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α. ερωτήματος.

Λύση

α. $|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ ή $x=2-\sqrt{3}$.

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$.

Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2=2-\sqrt{3}$. Είναι $S=x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$ και

$P=x_1\cdot x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2==4-3=1$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$.

88 Θέμα 2 – 1262

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $A+B=\dfrac{1}{2}$ **ii.** $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

Λύση

α. Είναι:

i. $A+B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}==\dfrac{10}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{10}{25-5}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

ii. $A\cdot B=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}=\dfrac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{1}{25-5}=\dfrac{1}{20}$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0$ με $S=A+B=\dfrac{1}{2}$ και $P=A\cdot B=\dfrac{1}{20}$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$.

89 Θέμα 2 – 1337

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\dfrac{1}{2}$.

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B .

Λύση

α. Είναι:

- $A+B=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{6}{9-7}=\dfrac{6}{2}=3$
- $AB=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\dfrac{1}{9-7}=\dfrac{1}{2}$

β. Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ όπου $S=A+B=3$ και $P=A\cdot B=\dfrac{1}{2}$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-3x+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2x^2-6x+1=0$.

90 Θέμα 2 – 1280

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha+\beta=2$
- $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-30\Leftrightarrow \alpha\beta=-15$

β. Η εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=2$, $P=\alpha\beta=-15$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-2x-15=0$.

Είναι:

- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-15) = 4 + 60 = 64 > 0$
- $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$

Οπότε $x_1 = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ και $x_2 = \dfrac{2-8}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Οπότε $(\alpha = 5$ και $\beta = -3)$ ή $(\alpha = -3$ και $\beta = 5)$.

91 Θέμα 2 – 1315

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β , και να τους βρείτε.

Λύση

α. Έχουμε:
- $\alpha\beta = 4$
- $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = 20 \Leftrightarrow 4\cdot(\alpha+\beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$.

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = \alpha + \beta = 5$ και $P = \alpha\beta = 4$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$.

Είναι:

- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$
- $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2x1} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$. Οπότε $x_1 = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ και $x_2 = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Άρα $(\alpha = 4$ και $\beta = 1)$ ή $(\alpha = 1$ και $\beta = 4)$.

92 Θέμα 2 – 1316

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha + \beta = -1$
- $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta = -12$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = \alpha + \beta = -1$ και $P = \alpha\beta = -12$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2 + x - 12 = 0$.

Είναι:

- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$
- $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$. Οπότε: $x_1 = \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{-1-7}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$.

Άρα $(\alpha = -4$ και $\beta = 3)$ ή $(\alpha = 3$ και $\beta = -4)$.

93 Θέμα 2 – 1334

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha+\beta=12 \quad \text{και} \quad \alpha^2+\beta^2=272$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha\cdot\beta=-64$$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β.

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β.

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha+\beta=12$
- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 144=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow -2\alpha\beta=128 \Leftrightarrow \alpha\beta=-64$

β. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=12$, $P=\alpha\beta=-64$, οπότε η εξίσωση είναι $x^2-12x-64=0$, (1).

γ. Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε

$$12^2=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow 144=272+2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-128 \Leftrightarrow \alpha\beta=-64$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx-P=0 \quad \text{με} \quad S=\alpha+\beta=12 \quad \text{και} \quad P=\alpha\beta=-64$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-12$ και $\gamma=-64$, έχουμε:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-64)=144+256=400>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{400}}{2\cdot1}=\dfrac{12\pm20}{2}$

Οπότε $x_1=\dfrac{12+20}{2}=\dfrac{32}{2}=16$ και $x_2=\dfrac{12-20}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$.

94 Θέμα 2 – 1288

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-\kappa x-2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-2=0$ (1),

i. Να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$$\rho_1=2x_1 \quad \text{και} \quad \rho_2=2x_2$$

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha=1$, $\beta=-\kappa$, $\gamma=-2$
- $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-\kappa)^2-4\cdot1\cdot(-2)=\kappa^2+8>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

β. Είναι $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-3}{1}=3$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-2}{1}=-2$.

ii. Είναι:
- $S'=\rho_1+\rho_2=2(x_1+x_2)=2S=2\cdot3=6$.
- $P'=\rho_1\cdot\rho_2=2x_1\cdot2x_2=4x_1x_2=4P=4\cdot(-2)=-8$.

Οπότε η εξίσωση είναι $x^2-S'x+P'=0 \Leftrightarrow x^2-6x-8=0$.

95 Θέμα 2 – 1269

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

β. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2 , $x_1\cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

γ. Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

Λύση

α. Το τριώνυμο $2x^2+5x-1$ έχει $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot(-1)=25+8=33>0$, οπότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 .

β. Είναι:
- $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{5}{2}$
- $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$

γ. Είναι $S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$ και $P=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1\cdot x_2}=-2$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-5x-2=0$.

96 Θέμα 4 – 1508

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Να δείξετε ότι: $x_1+x_2=2$.

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$.

ii. Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

Λύση

α. Η εξίσωση έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot\lambda=4-4\lambda=4(1-\lambda)>0$, αφού $\lambda<1\Leftrightarrow1-\lambda>0$, οπότε έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Είναι $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-2}{1}=2$, άρα $x_1+x_2=2$, (1).

γ. i. Έχουμε $|x_1-2|=|x_2+2|\Leftrightarrow x_1-2=x_2+2$ ή $x_1-2=-(x_2+2)\Leftrightarrow x_1-x_2=4$ ή $x_1+x_2=0$

Επειδή $x_1+x_2=2$, αποκλείεται $x_1+x_2=0$, οπότε $x_1-x_2=4$, (2) .

ii. Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $x_1+x_2+x_1-x_2=2+4\Leftrightarrow 2x_1=6\Leftrightarrow x_1=3$.

Οπότε η (1) $3+x_2=2\Leftrightarrow x_2=-1$. Είναι $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow 3\cdot(-1)=\frac{\lambda}{1}\Leftrightarrow\lambda=-3$.

97 Θέμα 4 – 1463

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$$

όπου α , β δύο θετικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

β. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α , β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α , β .

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ge 4$$

Λύση

α. Είναι $\Delta=[-(\alpha^2+\beta^2)]^2-4\alpha\beta\cdot\alpha\beta=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

β. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha^2-\beta^2)^2>0\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2\ne0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\ne0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha-\beta\ne0$ και $\alpha+\beta\ne0$, που ισχύει αφού α, β θετικοί. Άρα $\alpha\ne\beta$.

Είναι: $x_{1,2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2}}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta}$

οπότε $x_1=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

γ. Είναι $(1+x_1)(1+x_2)\ge4\Leftrightarrow(1+\dfrac{\alpha}{\beta})(1+\dfrac{\beta}{\alpha})\ge4\Leftrightarrow1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+1\ge4\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}\ge2$, $\alpha\beta>0$

$$\Leftrightarrow\alpha\beta\frac{\beta}{\alpha}+\alpha\beta\frac{\alpha}{\beta}\ge2\alpha\beta\Leftrightarrow\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\ge0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\ge0 \text{ , που ισχύει.}$$

98 Θέμα 4 – 1461

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) , τότε και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ. Για $\lambda>2$, να αποδείξετε ότι:

i. Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii. $x_1+4x_2\ge4$

Λύση

α. Είναι • $\alpha=1$, $\beta=-\lambda$ και $\gamma=1$

• $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot1=\lambda^2-4$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta>0\Leftrightarrow\lambda^2-4>0\Leftrightarrow\lambda^2>4\Leftrightarrow|\lambda|^2>2^2\Leftrightarrow|\lambda|>2\Leftrightarrow\lambda<-2 \text{ ή } \lambda>2$$

β. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (1) τότε $\rho^2-\lambda\rho+1=0$.

Για $x=\dfrac{1}{\rho}$ η εξίσωση (1) γίνεται $\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2-\lambda\cdot\dfrac{1}{\rho}+1=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\rho^2-\lambda\rho+1=0$ που ισχύει.

γ. i. Αν $\lambda>2$, τότε $S=x_1+x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda>0$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{1}{1}=1>0$.

Επειδή $S>0$ και $P>0$ οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικοί αριθμοί.

ii. Είναι $P=1 \Leftrightarrow x_1x_2=1 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

Οπότε $x_1+4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow x_1+\dfrac{4}{x_1} \geq 4 \Leftrightarrow {x_1}^2+4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2-4x_1+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1-2)^2 \geq 0$, που ισχύει.

99 Θέμα 4 – 1431

Δίνεται η εξίσωση $\mathbf{x^2-4x+2-\lambda^2=0}$ **(1) με παράμετρο** $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ **, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.**

β. Αν x_1 **και** x_2 **είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) :**

i. Να βρείτε το $S=x_1+x_2$ **.**

ii. Να βρείτε το $P=x_1 \cdot x_2$ **ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού** λ **.**

γ. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ **τότε:**

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$ **,**

ii. να βρείτε το λ **.**

Λύση

α. Είναι: • $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=2-\lambda^2$

• $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\,(2-\lambda^2)=16-8+4\lambda^2=8+4\lambda^2$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Είναι: **i.** $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-4}{1}=4$

ii. $P=x_1\,x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2-\lambda^2}{1}=-\lambda^2+2$

γ. i. Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$. Έχουμε $x_1+x_2=4 \Leftrightarrow 2+\sqrt{3}+x_2=4 \Leftrightarrow x_2=2-\sqrt{3}$.

ii. Είναι $x_1\,x_2=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow 2^2-(\sqrt{3})^2=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1=-\lambda^2+2 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1 .$$

100 Θέμα 4 – 1491

Δίνεται η εξίσωση: $\mathbf{x^2-5\lambda x-1=0}$ **, με παράμετρο** $\lambda \in \mathbb{R}$ **.**

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ **, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.**

β. Αν x_1, x_2 **είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:**

i. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ **, για τις οποίες ισχύει:**

$$\mathbf{(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24}=0}$$

ii. Για $\lambda=1$ **, να βρείτε την τιμή της παράστασης:** $\mathbf{{x_1}^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1{x_2}^2}$ **.**

Λύση

α. Είναι $\Delta=(-5\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=25\lambda^2+4>0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. i. Είναι $S=x_1+x_2=-\dfrac{-5\lambda}{1}=5\lambda$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{-1}{1}=-1$.

Οπότε $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24}=0 \Leftrightarrow (5\lambda)^2-18-7(-1)^{24}=0 \Leftrightarrow 25\lambda^2-18-7=0 \Leftrightarrow 25\lambda^2=25$

$$\Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1$$

ii. Για $\lambda=1$ είναι $x_1+x_2=5\cdot 1=5$ και $x_1x_2=-1$.

Οπότε ${x_1}^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1{x_2}^2={x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2-3x_1-3x_2+4=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)-3(x_1+x_2)+4=-1\cdot 5-3\cdot 5+4=-5-15+4=-16$.

101 Θέμα 4 – 1450

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i. να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$

ii. να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

Λύση

α. Είναι $(x-2)^2=\lambda(4x-3)\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow x^2-4x-4\lambda x+3\lambda+4=0$

$$\Leftrightarrow x^2+[-4(\lambda+1)]x+3\lambda+4=0$$

β. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow[-4(\lambda+1)]^2-4\cdot1\cdot(3\lambda+4)>0\Leftrightarrow \Leftrightarrow 16(\lambda^2+2\lambda+1)-4(3\lambda+4)>0$

$$\Leftrightarrow 16\lambda^2+32\lambda+16-12\lambda-16>0 \Leftrightarrow 16\lambda^2+20\lambda>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2+5\lambda>0 \quad (1)$$

Είναι $4\lambda^2+5\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(4\lambda+5)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $4\lambda+5=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=-\frac{5}{4}$

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$4\lambda^2+5\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda<-\frac{5}{4}$ ή $\lambda>0$.

γ. Είναι **i.** $S=x_1+x_2=-\frac{-4(\lambda+1)}{1}=4(\lambda+1)$ και $P=x_1\cdot x_2=\frac{3\lambda+4}{1}=3\lambda+4$.

ii. $A=(4x_1-3)\cdot(4x_2-3)=16x_1x_2-12x_1-12x_2+9=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9=$
$=16\cdot(3\lambda+4)-12\cdot4(\lambda+1)+9=48\lambda+64-48\lambda-48+9=25$

102 Θέμα 4 – 1438 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

103 Θέμα 4 – 1404 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

104 Θέμα 4 – 1407

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A<t_B\ ,\quad t_\Gamma=\frac{t_A+2t_B}{3}\quad \text{και}\quad |t_A-t_\Delta|=|t_B-t_\Delta|$$

α. i. Να δείξετε ότι: $t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$

ii. Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A+t_B=6\quad \text{και}\quad t_A\cdot t_B=8$$

i. Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

ii. Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

Λύση

α. i. $|t_A-t_\Delta|=|t_B-t_\Delta|\Leftrightarrow t_A-t_\Delta=t_B-t_\Delta$, (1) ή $t_A-t_\Delta=-t_B+t_\Delta$, (2)

- η (1)$\Leftrightarrow t_A=t_B$, που απορρίπτεται αφού $t_A<t_B$
- η (2)$\Leftrightarrow t_A+t_B=2t_\Delta\Leftrightarrow 2t_\Delta=t_A+t_B\Leftrightarrow t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$

ii. Είναι:

- $t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0$, άρα $t_\Gamma < t_B$, (1)
- $t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0$, άρα $t_\Delta < t_\Gamma$, (2)
- $t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0$, άρα $t_A < t_\Delta$, (3)

Οπότε $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$.

Επομένως, $1^{ος}$ τερμάτισε ο Αργύρης, $2^{ος}$ ο Δημήτρης, $3^{ος}$ ο Γιώργος και $4^{ος}$ ο Βασίλης.

β. i. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$.

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - 6t + 8 = 0$.

ii. Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

και ρίζες τις $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$, οπότε $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ λεπτά , $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ λεπτά.

105 Θέμα 4 – 1504 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

106 Θέμα 4 – 1478

α. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ cm^2$.

ii. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\ cm^2$ και διαγώνιο 8 cm.

Λύση

α. i. Αν α , β οι διαστάσεις του ορθογωνίου, έχουμε

- $\Pi = 34 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 34 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 17$
- $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 169$, (1)

Είναι $\alpha + \beta = 17 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 = 289 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 289 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 169 + 2\alpha\beta = 289 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 120 \Leftrightarrow \alpha\beta = 60$

Οπότε $E = \alpha \cdot \beta = 60\ cm^2$.

ii. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = \kappa + \lambda = 17$ και $P = \kappa \cdot \lambda = 60$

Οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 - 17x + 60 = 0$, (1).

iii. Η εξίσωση (1) έχει:
- $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$
- $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2}$

Οπότε $x_1 = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12$ και $x_2 = \frac{17-7}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Άρα οι διαστάσεις είναι 5 cm και 12 cm .

β. Αρκεί να υπάρχουν α , β τέτοια ώστε

- $\alpha\beta = 40$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2 \cdot 40 = 64 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - 80 = 64$

  $\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 = 144 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$, αφού $\alpha, \beta > 0$

Άρα, τα α , β πρέπει να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x + 40 = 0$, η οποία είναι αδύνατη, αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.

107 Θέμα 4 – 14651

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0\ ,\quad \lambda\in(0,4)$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii. το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi\ge 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$.

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16 ; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Λύση

α. Είναι $S=x_1+x_2=4(\lambda+\frac{1}{\lambda})$ και $P=x_1\cdot x_2=16$. Οπότε το ορθογώνιο έχει:

i. $\Pi=2(x_1+x_2)=8(\lambda+\frac{1}{\lambda})$ ii. $E=x_1x_2=16$

β. Είναι $\Pi\ge 16\Leftrightarrow 8(\lambda+\frac{1}{\lambda})\ge 16\Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{\lambda}\ge 2\overset{\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda^2+1\ge 2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1\ge 0$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda\in(0\ ,4)$.

γ. Είναι $\Pi=16\Leftrightarrow 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)=16\overset{\beta.}{\Leftrightarrow}(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Για $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται

$x^2-4(1+1)x+16=0\Leftrightarrow x^2-8x+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4$.

Οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $x=4$. Άρα $x_1=x_2=4$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

108 Θέμα 4 – 1493

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0\quad\text{με}\quad\lambda\in(0,2)$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β. Να αποδείξετε ότι $E\le 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1 ; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Λύση

α. Από τους τύπους Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=2$ και $P=x_1\cdot x_2=\lambda(2-\lambda)$.

Το ορθογώνιο έχει:

i. $\Pi=2(x_1+x_2)=4$

ii. $E=x_1x_2=\lambda(2-\lambda)$

β. Είναι $E\le 1\Leftrightarrow\lambda(2-\lambda)\le 1\Leftrightarrow 2\lambda-\lambda^2\le 1\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\ge 0$, που ισχύει .

γ. Είναι $E=1\overset{\cdot\beta}{\Leftrightarrow}(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Για $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$, διπλή.

Άρα $x_1=x_2=1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

109 Θέμα 4 – 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β. Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\le 9$.

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.

γ. Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Λύση

α. Η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=36-4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta\ge0\Leftrightarrow 36-4\lambda\ge0\Leftrightarrow -4\lambda\ge-36\Leftrightarrow\lambda\le9$.

β. i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο **α.** ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda\le9\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta\le9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha=\beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta=0$ δηλαδή $36-4\lambda=0$ οπότε $-4\lambda=-36$ και τελικά $\lambda=9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha\cdot\beta=9$.

γ. Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12.
Τότε $2\alpha+2\beta=12$ δηλαδή $\alpha+\beta=6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha\cdot\beta$.

Δείξαμε στο **β.** ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha+\beta=6$, τότε $\alpha\cdot\beta\le9$ και μάλιστα $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

15. Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

110 Θέμα 2 – 1238

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

Λύση

α. Είναι $-2x^2+10x=12\Leftrightarrow-2x^2+10x-12=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$.

Είναι:

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm1}{2}$

Οπότε $x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$. Πρέπει: $x-2\ne0\Leftrightarrow x\ne2$.

Για $x\ne2$ είναι $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow-2x^2+10x-12=0\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}x=3$ ή $x=2$, που απορρίπτεται.

Άρα $x=3$.

111 Θέμα 2 – 1332 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

112 Θέμα 4 – 1448

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι, αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

Λύση

α. Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot\alpha\cdot\alpha = 25 - 4\alpha^2$.

Αρκεί $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4\alpha^2 \geq -25 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$, που ισχύει.

Αν x_1, x_2 οι ρίζες τότε $x_1 x_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, οπότε είναι αντίστροφες.

β. Για $\alpha = 2$, έχουμε $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Είναι:
- $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$
- $x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} == \frac{5\pm 3}{4}$.

Οπότε $x = \frac{8}{4} = 2$ ή $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

γ. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε έχουμε $2y^2 - 5y + 2 = 0 \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} y = 2$ ή $y = \frac{1}{2}$.

- Για $y = 2$ η (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Για $y = \frac{1}{2}$ η (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$

Η εξίσωση έχει $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη. Άρα $x = 1$.

113 Θέμα 4 – 1460

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, με β , γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

β. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

γ. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο α. ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

α. Από τους τύπους Vieta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{-\beta}{1} = \beta$, οπότε $|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = \pm 4$.

β. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, οπότε

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 - 4\cdot 1\cdot\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow 16 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma < 4$$

γ. ► Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$, (2).

Θέτουμε $|x| = y$ οπότε η (2) $\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$.

Είναι: • $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$ και ρίζες τις:

• $y_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm2}{2}$

Οπότε $y=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ ή $y=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

• Για $y=3 \Leftrightarrow |x|=3\Leftrightarrow x=\pm3$
• Για $y=1 \Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

► Για $\beta=-4$ η εξίσωση (1) $\Leftrightarrow x^2-(-4)|x|+3=0\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$, (3)
Θέτουμε $|x|=\omega$, οπότε η (3) $\Leftrightarrow \omega^2-4\omega+3=0$.

Είναι: • $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$

• $\omega_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm2}{2}$.

Οπότε $\omega=\dfrac{-4+2}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ ή $\omega=\dfrac{-4-2}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

• Για $\omega=-1 \Leftrightarrow |x|=-1$, αδύνατη
• Για $\omega=-3 \Leftrightarrow |x|=-3$, αδύνατη

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\beta=-4$.

114 Θέμα 4 – 1482

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-9x^2+20=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4+\beta x^2+\gamma=0$,

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

Λύση

α. Θέτουμε $x^2=y$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$x^4-9x^2+20=0\Leftrightarrow (x^2)^2-9x^2+20=0 \Leftrightarrow y^2-9y+20=0$$

Είναι: • $\Delta=(-9)^2-4\cdot1\cdot20=81-80=1$

• $y_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-9)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{9\pm1}{2}$. Οπότε $y=\dfrac{10}{2}=5$ ή $y=\dfrac{8}{2}=4$

• Αν $y=5 \Leftrightarrow x^2=5\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$
• Αν $y=4 \Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$.

Άρα η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β. Η $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όταν η εξίσωση $y^2+\beta y+\gamma=0$ έχει διπλή θετική ρίζα.

Οπότε $\Delta=0\Leftrightarrow\beta^2-4\gamma=0\Leftrightarrow\beta^2=4\gamma$ ή δύο ρίζες ετερόσημες, οπότε $x_1x_2<0\Leftrightarrow\dfrac{\gamma}{1}<0$.

Για $\beta=-2$ και $\gamma=1$ είναι $\beta^2=4\gamma$ και έχουμε την εξίσωση

$$x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

115 Θέμα 4 – 1477

α. **Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.**

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. **Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.**

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i. **$\beta^2 - 4\gamma > 0$**

ii. **η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.**

Λύση

α. Είναι $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \overset{x^2=y}{\Leftrightarrow} y^2 - 8y - 9 = 0$.

- $\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot(-9) = 64 + 36 = 100$
- $y_{1,2} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2}$. Οπότε $y = \dfrac{18}{2} = 9$ ή $y = \dfrac{-2}{2} = -1$.
- Αν $y = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- Αν $y = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$, αδύνατη .

Άρα η εξίσωση έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

β. Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y^2 + \beta y + \gamma = 0$, (1) .

i. Η (1) έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Είναι:
- $\beta^2 \geq 0$
- $\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0$

Οπότε $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii. Η (1) έχει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$, από το ερώτημα **β.i.** και $P = \gamma < 0$. Άρα έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και από τη θετική ρίζα προκύπτει ότι η αρχική έχει δύο άνισες ρίζες.

116 Θέμα 4 – 1445 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

16. Ανισώσεις 1ου βαθμού

117 Θέμα 2 – 1357

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$.

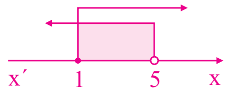
α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

Λύση

α. Είναι:

- $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5$
- $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 4-x\le 2x+1 \Leftrightarrow -x-2x\le 1-4 \Leftrightarrow -3x\le -3 \Leftrightarrow 3x\ge 3 \Leftrightarrow x\ge 1$



β. Το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το διάστημα $[1, 5)$.

118 Θέμα 4 – 1423 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

17. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

119 Θέμα 2 – 1330

α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|2x-3|\le 5$

ii. $|2x-3|\ge 1$

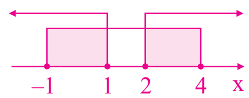
β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Λύση

α. Είναι:

i. $|2x-3|\le 5 \Leftrightarrow -5\le 2x-3\le 5 \Leftrightarrow -2\le 2x\le 8 \Leftrightarrow -1\le x\le 4$

ii. $|2x-3|\ge 1 \Leftrightarrow 2x-3\ge 1$ ή $2x-3\le -1 \Leftrightarrow 2x\ge 4$ ή $2x\le 2 \Leftrightarrow x\ge 2$ ή $x\le 1$



β. Οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν όταν:

$x\in[-1, 1]\cup[2, 4]$

120 Θέμα 2 – 1365

α. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\ge 3$.

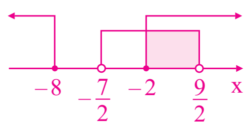
γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α. και β. με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

Λύση

Είναι:

α. $|x-\frac{1}{2}|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-4<x<\frac{1}{2}+4 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

β. $|x+5|\ge 3 \Leftrightarrow x+5\ge 3$ ή $x+5\le -3 \Leftrightarrow x\ge -2$ ή $x\le -8$



γ. Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι: $x\in[-2, \frac{9}{2})$.

121 Θέμα 2 – 1374

α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x|<5$ **ii.** $|1-2x|\ge 1$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x, για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

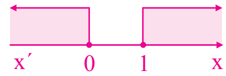
Λύση

α. Είναι: **i.** $|1-2x|<5 \Leftrightarrow |2x-1|<5 \Leftrightarrow -5<2x-1<5 \Leftrightarrow -5+1<2x<5+1$

$\Leftrightarrow -4<2x<6 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{2}<x<\dfrac{6}{2} \Leftrightarrow -2<x<3$

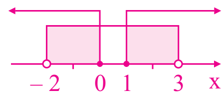
ii. $|1-2x|\ge 1 \Leftrightarrow |2x-1|\ge 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x-1\ge 1$ ή $2x-1\le -1$

$\Leftrightarrow 2x\ge 2$ ή $\Leftrightarrow x\ge 1$ ή $x\le 0$



β. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών οι κοινές λύσεις είναι: $x\in(-2,\,0]\cup[1,\,3)$.

Οι ζητούμενες ακέραιες τιμές του x είναι: $-1,\,0,\,1,\,2$.



122 Θέμα 2 – 1355

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

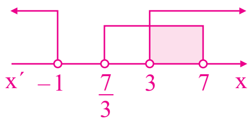
γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Λύση

α. Είναι $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow 3<x<7$

β. Είναι $|2-3x|>5 \Leftrightarrow |3x-2|>5 \Leftrightarrow 3x-2>5$ ή $3x-2<-5 \Leftrightarrow 3x>7$ ή $3x<-3 \Leftrightarrow x>\dfrac{7}{3}$ ή $x<-1$

γ. Οι ζητούμενες κοινές λύσεις είναι: $x\in(3,\,7)$.



123 Θέμα 2 – 1243

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 .

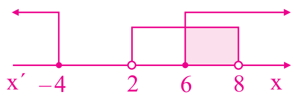
γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α. και β. .

Λύση

α. Είναι $|x-1|\ge 5 \Leftrightarrow x-1\ge 5$ ή $x-1\le -5 \Leftrightarrow x\ge 6$ ή $x\le -4$

β. Είναι $d(x,5)<3 \Leftrightarrow |x-5|<3 \Leftrightarrow -3<x-5<3 \Leftrightarrow 2<x<8$

γ. Οι κοινές λύσεις των **α.** και **β.** είναι: $x\in[6,\,8)$.



124 Θέμα 2 – 13025

α. Να λύσετε την ανίσωση $-\dfrac{3-2x}{7}\ge 5$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1|\le 23$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

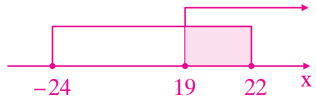
Λύση

α. Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $\dfrac{-(3-2x)}{7}\ge 5$ οπότε $\dfrac{2x-3}{7}\ge 5 \Leftrightarrow 2x-3\ge 35$, άρα

$2x\ge 38 \Leftrightarrow x\ge 19$.

β. Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $|x+1| \le 23 \Leftrightarrow -23 \le x+1 \le 23 \Leftrightarrow -23-1 \le x \le 23-1 \Leftrightarrow -24 \le x \le 22$.

γ. Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ' όπου προκύπτει ότι $19 \le x \le 22$.



125 Θέμα 4 – 13474

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1| \le \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3-\frac{x+4}{2}<0 \quad (2)$$

α. Να λύσετε την ανίσωση (1).

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

δ. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

Λύση

α. Είναι:

$$|x-1| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x-1 \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$$

β. Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1-\sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1+\sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

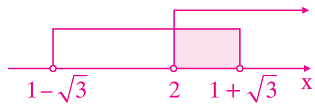
$$s = x_1 + x_2 = 1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 2 \quad \text{και} \quad p = x_1 x_2 = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) = 1-3 = -2$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ. Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3-\frac{x+4}{2}<0 \Leftrightarrow 6-(x+4)<0 \Leftrightarrow 6-x-4<0 \Leftrightarrow -x<-2 \Leftrightarrow x>2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \le 1+\sqrt{3}$.



δ. Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $(2, 1+\sqrt{3}]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \le 3(1+\sqrt{3})$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \le 4(1+\sqrt{3})$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha+4\beta \le 7(1+\sqrt{3})$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha+4\beta}{7} \le 1+\sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

126 Θέμα 2 – 1367

α. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$.

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α. ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β. ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι:

α. $|2x-4|=3|x-1| \Leftrightarrow |2x-4|=|3(x-1)| \Leftrightarrow |2x-4|=|3x-3| \Leftrightarrow 2x-4=3x-3$ ή $2x-4=-(3x-3)$
$\Leftrightarrow 2x-3x=-3+4$ ή $2x+3x=3+4 \Leftrightarrow -x=1$ ή $5x=7$
$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=\dfrac{7}{5}$.

β. $|3x-5|>1 \Leftrightarrow 3x-5>1$ ή $3x-5<-1 \Leftrightarrow 3x>6$ ή $3x<4 \Leftrightarrow x>2$ ή $x<\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x\in(-\infty,\dfrac{4}{3})\cup(2,+\infty)$

γ. Επειδή $-1<\dfrac{4}{3}$, η λύση $x=-1$ της εξίσωσης, είναι και λύση της ανίσωσης.

Είναι:
- $\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{21-20}{15}=\dfrac{1}{15}>0$, οπότε $\dfrac{7}{5}>\dfrac{4}{3}$
- $\dfrac{7}{5}-2=\dfrac{7-10}{5}=-\dfrac{3}{5}<0$, οπότε $\dfrac{7}{5}<2$

Άρα $\dfrac{4}{3}<\dfrac{7}{5}<2$, οπότε η λύση $x=\dfrac{7}{5}$ της εξίσωσης δεν είναι λύση της ανίσωσης.

127 Θέμα 2 – 1331

α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0$ (1)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2)

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) .

Λύση

α. Η εξίσωση $2x^2-x-6=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49>0$ και

ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2\cdot2}=\dfrac{1\pm7}{4}$, οπότε $x_1=\dfrac{8}{4}=2$ και $x_2=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

β. Είναι $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$.

γ. Επειδή $x_1=-\dfrac{3}{2}\notin(1,3)$ και $x_2=2\in(1,3)$, η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι ο αριθμός 2 .

128 Θέμα 2 – 1383

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α. να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

β. να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Λύση

α. Είναι $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$

β. Έχουμε $-3<x<1 \Rightarrow x>-3$ και $x<1 \Rightarrow x+3>0$ και $x-1<0$, οπότε

$|x+3|=x+3$ και $|x-1|=-(x-1)$. Επομένως $K=\dfrac{x+3-(x-1)}{4}=\dfrac{x+3-x+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1$.

129 Θέμα 4 – 13174

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $A=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

β. Να δείξετε ότι $A=3-|x|$ και $B=|x|-2$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $B-A<2d(x\,,4)-5$.

Λύση

α. Η παράσταση A ορίζεται όταν : $|x|-1\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq 1\Leftrightarrow x\neq \pm 1$

και η παράσταση B όταν: $|x|-2\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq 2\Leftrightarrow x\neq \pm 2$

β. Έχουμε: $-x^2+4|x|-3=-|x|^2+4|x|-3$. Θέτουμε $\omega=|x|$, οπότε

$$-|x|^2+4|x|-3=-\omega^2+4\omega-3,$$

που είναι τριώνυμο με ρίζες τους αριθμούς 3 και 1 .

Άρα $-\omega^2+4\omega-3=-(\omega-1)(\omega-3)$ και $-|x|^2+4|x|-3=-\big(|x|-1\big)\big(|x|-3\big)$.

Συνεπώς: $A=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}=\dfrac{-\big(|x|-1\big)\big(|x|-3\big)}{\big(|x|-1\big)}=3-|x|$.

Για την παράσταση B έχουμε: $B=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}=\dfrac{|x|^2-4|x|+4}{|x|-2}=\dfrac{\big(|x|-2\big)^2}{\big(|x|-2\big)}=|x|-2$.

γ. Η ανίσωση γίνεται:

$B-A<2d(x\,,4)-5\Leftrightarrow |x|-2-3+|x|<2|x-4|-5\Leftrightarrow 2|x|-5<2|x-4|-5\Leftrightarrow$

$|x|<|x-4|\Leftrightarrow |x|^2<|x-4|^2\Leftrightarrow x^2<(x-4)^2\Leftrightarrow x^2<x^2-8x+16\Leftrightarrow x<2$

Δεδομένου ότι για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x\neq\pm1$ και $x\neq\pm2$, τελικά η ανίσωση αληθεύει για

$$x\in(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,-1)\cup(-1,1)\cup(1\,,2)$$

130 Θέμα 4 – 1472 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

131 Θέμα 4 – 1455

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1) , τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0<d(x_1, x_2)<2$.

Λύση

α. Είναι: • $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=\lambda-\lambda^2$

• $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(2\lambda-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow 2\lambda-1=0\Leftrightarrow 2\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$.

γ. Είναι $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{(2\lambda-1)^2}}{2}=\dfrac{1\pm(2\lambda-1)}{2}$.

Οπότε $x_1=\dfrac{1+2\lambda-1}{2}=\dfrac{2\lambda}{2}=\lambda$ και $x_2=\dfrac{1-2\lambda+1}{2}=\dfrac{2-2\lambda}{2}=\dfrac{2(1-\lambda)}{2}=1-\lambda$

Είναι $0<d(x_1,x_2)<2\Leftrightarrow 0<|x_1-x_2|<2 \Leftrightarrow 0<|\lambda+\lambda-1|<2\Leftrightarrow 0<|2\lambda-1|<2 \Leftrightarrow |2\lambda-1|>0$ και $|2\lambda-1|<2$

Έχουμε:
- $|2\lambda-1|>0\Leftrightarrow 2\lambda-1\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq\dfrac{1}{2}$
- $|2\lambda-1|<2\Leftrightarrow -2<2\lambda-1<2 \Leftrightarrow -1<2\lambda<3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<\lambda<\dfrac{3}{2}$

Άρα $\lambda\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$.

18. Μορφές τριωνύμου

132 Θέμα 2 – 1250

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

β. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

Λύση

α. Το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25>0$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm5}{4}$. Οπότε $x_1=\dfrac{8}{4}=2$ και $x_2=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$. Οπότε $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα $2x^2-3x-2=2(x-2)(x+\dfrac{1}{2})=(x-2)(2x+1)$.

β. Η παράσταση K ορίζεται για εκείνα τα x που ισχύει

$$2x^2-3x-2\neq0\Leftrightarrow (x-2)(2x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq -\frac{1}{2}$$

γ. Για $x\neq 2$ και $x\neq\dfrac{1}{2}$ είναι $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)}=\dfrac{x-2}{2x+1}$.

133 Θέμα 2 – 1264 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

134 Θέμα 2 – 1273

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\sqrt{3}+1)^2$$

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

Λύση

α. Είναι: • $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{3}-1$, $\gamma=\sqrt{3}$

• $\Delta=(\sqrt{3}-1)^2+4\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2=(\sqrt{3}+1)^2$

β. Επειδή $\Delta>0$, το τριώνυμο έχει ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}+1)}{-2}$.

Οπότε $x_1=\dfrac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{-2}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$.

Άρα $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=-1\cdot(x+1)\cdot(x-\sqrt{3})=-(x+1)(x-\sqrt{3})$.

135 Θέμα 2 – 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-x-3$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$.

β. Να επιλύσετε την ανίσωση $-2\cdot f(x)<0$.

Λύση

α. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-3)=1+12=13>0$.

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

β. $-2\cdot f(x)<0 \Leftrightarrow 2\cdot f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.

Από τον διπλανό πίνακα προσήμου του τριωνύμου, έχουμε

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

136 Θέμα 2 – 12976

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\le-1$.

Λύση

α. Είναι $\Delta=9>0$. Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=-\frac{1}{2}$.

Επομένως το τριώνυμο γίνεται $2x^2-x-1=2(x-1)(x+\frac{1}{2})=(x-1)(2x+1)$.

β. Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x)\le-1 \Leftrightarrow -2x^2+x+1\le0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1\ge0$.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος.

Άρα μηδενίζεται για $x_1=1$ και $x_2=-\frac{1}{2}$ και επειδή το $\alpha=2>0$ προκύπτει ο διπλανός πίνακας.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		+	0	−	0	+	

Άρα $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

19. Ανισώσεις 2ου βαθμού

137 Θέμα 2 – 1291

α. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$.

β. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ. Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος β. ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$
- $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1\pm3}{2}$. Οπότε $x_1=\frac{4}{2}=2$ και $x_2=\frac{-2}{2}=-1$.

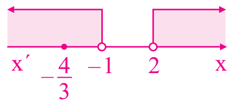
Άρα $x=2$ ή $x=-1$.

β. Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$x^2-x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ. Επειδή $-\dfrac{4}{3}=-1-\dfrac{1}{3}<-1$, το $-\dfrac{4}{3}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **β.** .



138 Θέμα 2 – 13321

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^4-16=0$. (1)

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x\le 0$. (2)

γ. Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

Λύση

α. Έχουμε:

$$x^4-16=0 \Leftrightarrow x^4=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=2$, $x=-2$.

β. Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου x^2+3x και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του x^2+3x . Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-3$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο διπλανός:

Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x\in[-3\,,0]$.

γ. Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x=-2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3\,,0]$.

139 Θέμα 2 – 1306

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος α. .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Το τριώνυμο $f(x)=3x^2+9x-12$ έχει:

- $\Delta=9^2-4\cdot 3\cdot(-12)=81+144=225$
- $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{225}}{2\cdot 3}=\dfrac{-9\pm 15}{6}$. Οπότε $x_1=\dfrac{6}{6}=1$ και $x_2=\dfrac{-24}{6}=-4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $x\in[-4,1]$.

Το σύνολο των λύσεων φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

β. Είναι $2>1 \Rightarrow \sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{1}=1$, οπότε ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **α.** .

140 Θέμα 2 – 1356

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$.

γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$.

Λύση

α. Το τριώνυμο $2x^2-3x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm1}{4}$, οπότε $x_1=\dfrac{4}{4}=1$ και $x_2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2-3x+1$	+	0	−	0	+

β. Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow x\in(\frac{1}{2},1)$.

γ. Είναι $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$

Οπότε $\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(\frac{1}{2},1)$, άρα οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

141 Θέμα 2 – 1279

α. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2-4x+1\le 0$.

β. Αν α , β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

Λύση

α. Το τριώνυμο $3x^2-4x+1$ έχει $\Delta=(-4)^2-4\cdot3\cdot1=16-12=4>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot3}=\dfrac{4\pm2}{6}$. Οπότε $x_1=\dfrac{6}{6}=1$ και $x_2=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$3x^2-4x+1$	+	0	−	0	+

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $3x^2-4x+1\le0 \Leftrightarrow x\in[\frac{1}{3},1]$.

β. Είναι $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}=\dfrac{3(\alpha+2\beta)}{9}=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$.

Επειδή οι αριθμοί α , β είναι λύσεις της ανίσωσης $3x^2-4x+1\le0$, έχουμε:

- $\dfrac{1}{3}\le\alpha\le1$
- $\dfrac{1}{3}\le\beta\le1 \Rightarrow \dfrac{2}{3}\le2\beta\le2$

Οπότε $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\le\alpha+2\beta\le1+2 \Leftrightarrow 1\le\alpha+2\beta\le3 \Rightarrow \dfrac{1}{3}\le\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\le1$.

Επομένως ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **α.** .

142 Θέμα 2 – 1271

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\le0$ (2)

α. Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) , (2) .

β. Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Λύση

α. • Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα
$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm1}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{4}{2}=2$.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	−	0	+

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε
$-x^2+5x-6<0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0$.

- Για το τριώνυμο x^2-16 είναι $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$.

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
x^2-16	$+$	0	$-$	0	$+$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε
$x^2-16 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$.

β. Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος **α.** είναι: $x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$.

143 Θέμα 2 – 1350

α. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \le 3$ και $2x^2-x-1 \ge 0$.

β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α. .

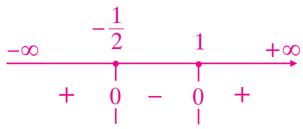
Λύση

α. • Είναι $|2x-5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$.

• Το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει $\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\dfrac{1\pm 3}{4}$.

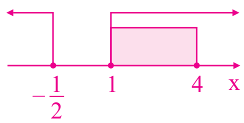
Οπότε $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.



Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Άρα $2x^2-x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\dfrac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.

β. Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι σε κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $x \in [1, 4]$.



144 Θέμα 2 – 1363

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{|x+1|}{3}-\dfrac{|x+1|+4}{5}=\dfrac{2}{3}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3 \le 0$.

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α. ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β. ερωτήματος.

Λύση

α. Θέτουμε $|x+1|=y$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται

$$\frac{y}{3}-\frac{y+4}{5}=\frac{2}{3} \overset{\cdot 15}{\Leftrightarrow} 5y-3(y+4)=5\cdot 2 \Leftrightarrow 5y-3y-12=10 \Leftrightarrow 2y=22 \Leftrightarrow y=11$$

Οπότε $|x+1|=11 \Leftrightarrow x+1=11$ ή $x+1=-11 \Leftrightarrow x=10$ ή $x=-12$.

β. Είναι $-x^2+2x+3 \le 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \ge 0$.

Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 4}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-2}{2}=-1$.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε
$x^2-2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

γ. Επειδή $10 \in [2, +\infty)$ και $-12 \in (-\infty, -1]$, οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος **α.** είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος **β.** .

145 Θέμα 4 – 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1\,,1]\cup[2\,,3)$.

γ. i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2\in(-1\,,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1\,,1]$ και $\rho_2\in[2\,,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

Λύση

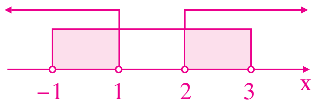
α. Έχουμε: $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

- Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty\,,1]\cup[2\,,+\infty)$.

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1\,,1]\cup[2\,,3)$.



γ. Εφόσον οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, θα ισχύει: $\rho_1\,,\rho_2\in(-1\,,1]\cup[2\,,3)$.

i. Αν $\rho_1\,,\rho_2\in(-1\,,1]$, τότε : $\begin{cases}-1<\rho_1\leq 1\\ -3<3\rho_2\leq 3\end{cases}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$-4<\rho_1+3\rho_2\leq 4 \Leftrightarrow -1<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}\leq 1$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.

ii. Αν $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2\,,3)$, τότε : $\begin{cases}-1<\rho_1\leq 1\\ 6<3\rho_2\leq 9\end{cases}$, και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$5<\rho_1+3\rho_2<10 \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο εάν $2\leq\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$.

146 Θέμα 2 – 1277

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$.

β. Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$.

i. Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$.

Λύση

α. Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει $\Delta=(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21=100-84=16$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{10\pm 4}{2}$, οπότε $x_1=\dfrac{14}{2}=7$ και $x_2=\dfrac{6}{2}=3$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε

$x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow x\in(3,7)$.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x-21$		+	0	−	0	+	

β. i. Για $3<x<7$ είναι $x>3 \Leftrightarrow x-3>0$ και $x^2-10x+21<0$. Οπότε $|x-3|=x-3$ και $|x^2-10x+21|=-(x^2-10x+21)$.

Άρα, $A=x-3-(x^2-10x+21)=-x^2+11x-24$.

ii. Για $x \in (3, 7)$ έχουμε $A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$.

Είναι: • $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1$

• $x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{11 \pm 1}{2}$. Οπότε $x_1 = \dfrac{12}{2} = 6$, $x_2 = \dfrac{10}{2} = 5$, που είναι δεκτές.

147 Θέμα 4 – 1402

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$$

Λύση

α. Είναι: • $\alpha = 1$, $\beta = -2(\lambda - 1)$, $\gamma = \lambda + 5$

• $\Delta = [-2(\lambda-1)]^2 - 4 \cdot 1(\lambda + 5) = 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda + 5) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4(\lambda + 5)$
$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$

β. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \ , \ (1)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$. Οπότε $\lambda_1 = \dfrac{8}{2} = 4$ και $\lambda_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

γ. Για $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ είναι

$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 24 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24$, (2)

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-2(\lambda - 1)}{1} = 2(\lambda - 1)$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda + 5}{1} = \lambda + 5$.

Οπότε η $(2) \Leftrightarrow [2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 5) = 24 \Leftrightarrow 4(\lambda - 1)^2 - 4\lambda - 20 = 24$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$ ή $\lambda = -2$, που είναι δεκτές.

148 Θέμα 4 – 1389 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

149 Θέμα 2 – 1346

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

Λύση

α. Είναι: • $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = \lambda^2 + \lambda - 1$

• $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$

Η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 4\lambda - 4 \leq 0$$

Το τριώνυμο $3\lambda^2+4\lambda-4$ έχει $\alpha=3$, $\Delta=4^2-4\cdot3\cdot(-4)=16+48=64>0$

και ρίζες τις $\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot3}=\dfrac{-4\pm8}{6}$.

Οπότε $\lambda_1=\dfrac{-4+8}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ και $\lambda_2=\dfrac{-4-8}{6}=\dfrac{-12}{6}=-2$

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow -2\le\lambda\le\dfrac{2}{3}$.

β. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

λ	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3\lambda^2+4\lambda-4$		+	0	−	0	+	

Οπότε είναι $S=-\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda$ και $P=\dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{1}=\lambda^2+\lambda-1$.

Έχουμε $S^2-P-2\ge0\Leftrightarrow\lambda^2-(\lambda^2+\lambda-1)-2\ge0\Leftrightarrow\lambda\le-1$. Πρέπει επιπλέον $-2\le\lambda\le\dfrac{2}{3}$.

Άρα $\lambda\in[-2,-1]$.

150 Θέμα 4 – 1406

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-16$$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 **και** x_2 **.**

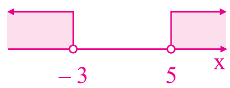
i. Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ **, το γινόμενο** $P=x_1\cdot x_2$ **των ριζών του συναρτήσει του** α **.**

ii. Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$ **.**

Λύση

α. Είναι $\Delta=[-(\alpha+1)]^2-4\cdot1\cdot(4+\alpha)=(\alpha+1)^2-16-4\alpha=\alpha^2+2\alpha+1-16-4\alpha$
$=\alpha^2-2\alpha+1-16=(\alpha-1)^2-16$

β. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2-16>0\Leftrightarrow(\alpha-1-4)(\alpha-1+4)>0$
$\Leftrightarrow(\alpha-5)(\alpha+3)>0\Leftrightarrow\alpha>5$ ή $\alpha<-3$



γ. Είναι:

i. $S=-\dfrac{-(\alpha+1)}{1}=\alpha+1$, $P=\dfrac{4+\alpha}{1}=\alpha+4$.

ii. $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=|x_1-1|\cdot|x_2-1|=|(x_1-1)(x_2-1)|=|x_1x_2-x_1-x_2+1|$
$=|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|=|\alpha+4-(\alpha+1)+1|=|\alpha+4-\alpha-1+1|=4$

151 Θέμα 4 – 1424 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

152 Θέμα 4 – 1425

Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le3$ **και** $x^2-4x<0$ **.**

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

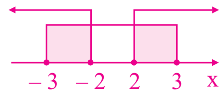
β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$ **.**

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 **και** ρ_2 **ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός** $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}$ **είναι κοινή τους λύση.**

Λύση

α. Είναι: • $2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow |x| \le 3$ και $|x| \ge 2 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$ και $(x \ge 2$ ή $x \le -2)$

$\Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$

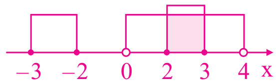


• $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$

x	−∞	0		4	+∞
$x^2 - 4x$	+	0	−	0	+

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$.

β. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.



γ. Οι $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ άρα $2 \le \rho_1 \le 3$ και $2 \le \rho_2 \le 3$, οπότε

$$4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \le 3 .$$

Άρα ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

153 Θέμα 4 – 1426

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α. Να λύσετε τις ανισώσεις.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

Λύση

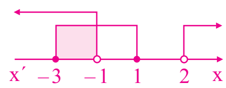
α. • Είναι $|x+1| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$

• Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$, οπότε $x = \frac{4}{2} = 2$ ή $x = \frac{-2}{2} = -1$.

x	−∞	−1		2	+∞
$x^2 - x - 2$	+	0	−	0	+

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Επομένως $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.



β. Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

γ. Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ έχουμε: • $-3 \le \rho_1 < -1$, (1)

• $-3 \le \rho_2 < -1 \Rightarrow 1 < -\rho_2 \le 3$, (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε $-2 < \rho_1 - \rho_2 < 2 \Rightarrow \rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

154 Θέμα 4 – 1396

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ. Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Λύση

Η εξίσωση έχει: • $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$, $\gamma = 4\lambda + 5$

• $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$.

α. Για $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 4(5^2 - 4 \cdot 5 - 5) = 4(25 - 20 - 5) = 0$, οπότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

β. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$.

Είναι:
- $\Delta' = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$
- $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$. Οπότε $\lambda_1 = \dfrac{10}{2} = 5$, $\lambda_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Άρα υπάρχει και η τιμή του $\lambda = -1$, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, όταν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0$, (1).

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

λ	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$\lambda^2 - 4\lambda - 5$		+	0	−	0	+	

δ. Είναι $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\Delta}{4} \le 0 \Leftrightarrow \Delta \le 0$.

Το ίσον ισχύει για $\lambda = -1$ ή $\lambda = 5$.

Οπότε για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ έχουμε $\Delta < 0$, επομένως η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές.

155 Θέμα 4 – 1432

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) , με παράμετρο λ .

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

Λύση

α. Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

β. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$\Delta = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - \lambda + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

i. Αν $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, από τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

Οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ομόσημες, όταν $\Delta \ge 0$ και $P > 0$, (όπου $P = x_1 x_2$) .

Είναι:
- $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$, (2)
- $P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} > 0 \Leftrightarrow 4(\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 \Leftrightarrow \lambda \in (2, +\infty)$, (3)

Οι (2) και (3) συναληθεύουν, όταν $\lambda \in [3, +\infty)$.

156 Θέμα 4 – 1442 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

157 Θέμα 4 – 1436

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0\ ,\ 1\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha^2\ ,\ \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α. .

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$.

Λύση

α. $x^2<x \Leftrightarrow x^2-x<0$, (1).

Είναι $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow x\in(0,1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

β. i. Έχουμε $0<\alpha<1$, οπότε:

- $\alpha^2>0$
- $\alpha<1 \overset{\cdot\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha^2<\alpha$
- $\alpha<1 \Rightarrow \sqrt{\alpha}<1$
- $\alpha^2<\alpha \Rightarrow \sqrt{\alpha^2}<\sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha<\sqrt{\alpha}$

Άρα $0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$.

ii. Είναι $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (\sqrt{1+\alpha})^2<(1+\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow 1+\alpha<1+2\sqrt{\alpha}+(\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow \alpha<2\sqrt{\alpha}+\alpha$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{\alpha}<0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}>0$, που ισχύει.

158 Θέμα 4 – 1439

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών .

γ. Αν $\lambda<0$, τότε:

i. το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

Λύση

α. Είναι $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1$

$=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Είναι $S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. i. Αν $\lambda<0$, τότε $S<0$ και $P=1>0$.

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες αρνητικές.

ii. Είναι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\right|\geq 2\cdot 1 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|}\geq 2 \overset{\cdot|\lambda|}{\Leftrightarrow} |\lambda^2+1|\geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2-2|\lambda|+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\lambda|^2-2|\lambda|+1>0 \Leftrightarrow (|\lambda|-1)^2\geq 0$, που ισχύει.

159 Θέμα 4 – 1440

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, με $\lambda>0$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$.

β. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i. να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii. να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\ge 4$ για κάθε $\lambda>0$.

iii. για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4 , τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι:

- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\ge 0$
- $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1>0$ και $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$, για κάθε $\lambda>0$.

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

β. i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=x_1\cdot x_2=1$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}=2\cdot(\lambda+\dfrac{1}{\lambda})$, για κάθε $\lambda>0$.

Είναι $\Pi\ge 4\Leftrightarrow 2(\lambda+\dfrac{1}{\lambda})\ge 4\Leftrightarrow \lambda+\dfrac{1}{\lambda}\ge 2 \overset{\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2+1\ge 2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\ge 0$, που ισχύει.

iii. Είναι $\Pi=4\Leftrightarrow\lambda+\dfrac{1}{\lambda}=2\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Για $\lambda=1$ έχουμε $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ το οποίο έχει διπλή ρίζα την $x=1$,

οπότε $x_1=x_2=1$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

160 Θέμα 4 – 1451

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$.

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha=1$, $\beta=-2\lambda$, $\gamma=-(\lambda^2+5)$
- $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot[-(\lambda^2+5)]=\lambda^2+4(\lambda^2+5)=\lambda^2+4\lambda^2+20=5\lambda^2+20$.

β. Επειδή $\Delta=5\lambda^2+20>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε $(x_1-2)(x_2-2)=-4\Leftrightarrow x_1x_2-2x_1-2x_2+4=-4\Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+8=0$, (1)
Από τους τύπους Vieta έχουμε

$x_1+x_2=\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda$ και $x_1x_2=\dfrac{-(\lambda^2+5)}{1}=-\lambda^2-5$.

Οπότε η $(1)\Leftrightarrow-\lambda^2-5-2\lambda+8=0\Leftrightarrow-\lambda^2-2\lambda+3=0\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda-3=0$

Είναι: • $\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$

• $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{-2\pm 4}{2}$. Οπότε $\lambda_1 = \dfrac{2}{2} = 1$ και $\lambda_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$.

Άρα $\lambda = 1$ ή $\lambda = -3$.

161 Θέμα 4 – 1391

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α. Είναι: • $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$, $\gamma = \lambda$

• $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 \ge 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$.

Οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda \neq 0$.

β. Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$.

γ. Είναι $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\lambda < 0$ και $\Delta \le 0$. Είναι $\Delta \le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 1$. Άρα $\lambda = -1$.

162 Θέμα 4 – 1462

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 .

α. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$.

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$

ii. να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$.

Λύση

α. Είναι: • $S = 1+2 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$

• $P = 1\cdot 2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$

β. i. Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α , για κάθε x , που ανήκει εντός των ριζών.
Επειδή παίρνει θετικές τιμές εντός των ριζών, συμπεραίνουμε ότι $\alpha < 0$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x-1)(x-2) > 0$, (1).

Είναι $1 < x < 2 \Leftrightarrow x > 1$ και $x < 2 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ και $x - 2 < 0$.

Άρα $(x-1)(x-2) < 0$.

Οπότε από την (1) έχουμε $\alpha < 0$.

ii. Είναι $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 3x + 1 > 0$, (2)

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \dfrac{3\pm 1}{4}$, οπότε $x_1 = \dfrac{4}{4} = 1$ και $x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		+	0	−	0	+	

η $(2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, \dfrac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

163 Θέμα 4 – 1465

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α , β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha<x_1<x_2<\beta$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Το τριώνυμο έχει:
- $\alpha=3$, $\beta=\kappa$, $\gamma=-4$
- $\Delta=\kappa^2-4\cdot 3\cdot(-4)=\kappa^2+48>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Οπότε έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3}<0$, οπότε οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ. Επειδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες έχουμε $\alpha<x_1<0<x_2<\beta$.

Οπότε $\alpha<0$, $\beta>0$ και $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, αφού οι αριθμοί α , β είναι εκτός των ριζών.

Άρα $\alpha f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)<0$.

x	$-\infty$ α	x_1		x_2	β $+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

164 Θέμα 4 – 1473

α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

Λύση

α. i. Έχουμε $x^2+2x+3=\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+3-\alpha=0$, (1) .

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=4-4(3-\alpha)=4-12+4\alpha=4\alpha-8=4(\alpha-2)$ και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2$.

ii. Η εξίσωση έχει ρίζα διπλή, όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow 4\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2$.

Η διπλή ρίζα είναι η $x_0=-\dfrac{2}{2\cdot 1}=-1$.

β. i. Είναι $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow f(x)-2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)-2=(x+1)^2$, οπότε

$\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}\leq 2 \Leftrightarrow |x+1|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x+1\leq 2 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1$.

165 Θέμα 4 – 1412

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)\cdot x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο α. ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο α. ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1) , αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

Λύση

α. Η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού, αν και μόνο αν $\lambda^2-\lambda\neq0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-1)\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq0$ και $\lambda\neq1$.

β. Για $\lambda\neq0,1$, η εξίσωση (1) γράφεται $\lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+\lambda-1=0\overset{:(\lambda-1)}{\Leftrightarrow}\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$, (2).

γ. Για $\lambda\neq0,1$ η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=[-(\lambda+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot1=(\lambda+1)^2-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2>0,$$

οπότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Επειδή η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού παίρνει τη μορφή (2) , που έχει ρίζες τις

$$x_{1,2}=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda} .$$

Οπότε $x_1=\frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=\frac{2\lambda}{2\lambda}=1$ και $x_2=\frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\frac{2}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}$. Άρα $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{\lambda}$.

166 Θέμα 4 – 1474 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

167 Θέμα 4 – 1475

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ. Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Αν $0<\lambda\neq1$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1+x_2}{2}$ και 1 .

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha=\lambda$, $\beta=-(\lambda^2+1)$, $\gamma=\lambda$
- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq0$, για κάθε $\lambda\neq0$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\neq0$.

β. Είναι $S=x_1+x_2=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\frac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. Αν $\lambda>0$, τότε $P>0$ και $S>0$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

δ. Αν $0<\lambda\neq1$, τότε $\frac{x_1+x_2}{2}-1=\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}-1=\frac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda}=\frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}>0$, αφού $\lambda\neq1$, οπότε $(\lambda-1)^2>0$ και $2\lambda>0$. Οπότε $\frac{x_1+x_2}{2}>1$.

168 Θέμα 4 – 1397

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ. Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου κ , μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x_1<\kappa<x_2<\mu$$

Λύση

α. Είναι:
- $\alpha=\lambda$, $\beta=-(\lambda^2+1)$, $\gamma=\lambda$
- $\Delta=[-(\lambda^2+1)]^2-4\lambda\cdot\lambda=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\neq 0$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\neq 0$.

β. Είναι: $S=-\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ. Επειδή $P=1>0$, το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Αφού επιπλέον έχουμε $\lambda>0$, είναι $S>0$, οπότε οι ρίζες είναι θετικές.

δ. Από το διπλανό πίνακα προσήμων του $f(x)$ έχουμε

$f(0)>0$, $f(\kappa)<0$ και $f(\mu)>0$. Οπότε $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)<0$.

x	$-\infty$	0	x_1	κ	x_2	μ	$+\infty$
$f(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

169 Θέμα 4 – 1511

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1|<4$ (1) .

α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) .

γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\leq 0$.

Λύση

α. Είναι $|x+1|<4 \Leftrightarrow -4<x+1<4 \Leftrightarrow -5<x<3$.

β. Οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) είναι οι αριθμοί: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

γ. Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\alpha=1>0$.

Για να έχει το τριώνυμο θετική τιμή, για κάθε $x\leq 0$, αποκλείεται να έχει ρίζες τις: $-4, -3, -2, -1, 0$, αφού τότε για τη ρίζα αυτή x_0 , θα είχαμε $x_0\leq 0$ και $f(x_0)=0$. Άρα μπορεί να έχει μόνο θετικές ρίζες.

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι αυτό που έχει ρίζες τις 1 , 2 . Δηλαδή το $x^2-Sx+P=x^2-3x+2$.

170 Θέμα 4 – 1512 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

171 Θέμα 4 – 1479

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

γ. Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

Λύση

α. $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

β. $x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ ή $x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$

γ. Το ζητούμενο τριώνυμο αποκλείεται να έχει ρίζες τις -1 και $-\sqrt{2}$. Το τριώνυμο $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1, $\sqrt{2}$ και έχει θετική τιμή για κάθε $x<0$.

172 Θέμα 4 – 1481

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. i. Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα i., όταν $\beta=0$.

γ. Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα β., να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

Λύση

α. Είναι $\Delta=\beta^2-4\cdot1\cdot\beta^2=\beta^2-4\beta^2=-3\beta^2$.

β. i. Αν $\beta\neq0$, τότε $\Delta<0$ και αφού είναι $\alpha=1>0$, το τριώνυμο παίρνει μόνο θετικές τιμές, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Αν $\beta=0$, τότε $\Delta=0$, οπότε το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και μηδενίζεται για $x=0$.

γ. • Αν $\beta=0$, τότε $\alpha\neq0$, οπότε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2>0$.

• Αν $\beta\neq0$, τότε $x^2+\beta x+\beta^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε για $x=\alpha$ έχουμε $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$.

Άρα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ που δεν είναι και οι δύο 0.

173 Θέμα 4 – 1483

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8.

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

β. Αν $\kappa=-\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι: • $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36$ και

• $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm6}{2}$. Οπότε $x=\dfrac{8}{2}=4$ ή $x=\dfrac{-4}{2}=-2$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		+	0	−	0	+	

β. Είναι: • $\kappa = -\dfrac{8889}{4444} = -\dfrac{8888}{4444} - \dfrac{1}{4444} = -2 - \dfrac{1}{4444} < -2$.

• $x^2 - 2x - 8 < 0$, για κάθε $x < -2$.

Οπότε για $x = \kappa < -2$ έχουμε $\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$.

γ. Είναι: • $\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$

• $-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4$, άρα $0 \le |\mu| < 4$

• $x^2 - 2x - 8 < 0$, για κάθε $x \in (-2, 4)$

Οπότε για $x = |\mu| \in (-2, 4)$ έχουμε $|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 2|\mu| - 8 < 0$.

174 Θέμα 4 – 1486

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ. Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = = 48 - 4\lambda$.

β. Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow 4\lambda < 48 \Leftrightarrow \lambda < 12$.

γ. i. Από τους τύπους Vieta, έχουμε: $S = \dfrac{6}{1} = 6 > 0$ και $P = \dfrac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3$.

Επειδή $3 < \lambda < 12$ έχουμε:

- $\lambda < 12 \Rightarrow \Delta > 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
- $\lambda > 3 \Rightarrow \lambda - 3 > 0 \Rightarrow P > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Επιπλέον έχουμε $S > 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες και θετικές ρίζες.

ii. Είναι $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, οπότε $\mu > 0$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $f(\kappa) > 0$ και $f(\mu) < 0$.

Άρα $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$.

x	$-\infty$	κ	x_1	μ	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+		0	−	0	+

175 Θέμα 4 – 1494

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ. Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 > 0$ και ρίζες τις

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 7}{2}$, οπότε $x_1 = \dfrac{12}{2} = 6$ και $x_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 6)$.

x	$-\infty$	-1		6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$	+	0	−	0	+

Ο αριθμός K προκύπτει με αντικατάσταση στο τριώνυμο x^2-5x-6, όπου $x=-\dfrac{46}{47}$.

Ο αριθμός $-\dfrac{46}{47}$ ανήκει στο διάστημα $(-1,6)$, όπου η παράσταση K είναι αρνητική.

Άρα $K=\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2+5\dfrac{46}{47}-6<0$.

β. Είναι $\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2-5\left(-\dfrac{46}{47}\right)-6<0 \Leftrightarrow x^2-5x-6<0$, για κάθε $x\in(-1,6)$.

Οπότε $x=-\dfrac{46}{47}\in(-1,6)$ έχουμε $K<0$.

γ. Έχουμε • $\alpha\in(-6,6)\Leftrightarrow -6<\alpha<6\Leftrightarrow |\alpha|<6$, οπότε $|\alpha|\in(-1,6)$
• $x^2-5x-6<0$, για κάθε $x\in(-1,6)$
Οπότε, για $x=|\alpha|\in(-1,6)$ έχουμε $|\alpha|^2-5|\alpha|-6<0\Leftrightarrow \alpha^2-5|\alpha|-6<0\Leftrightarrow \Lambda<0$.

176 Θέμα 4 – 1500

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β. i. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

ii. Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. i. Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1). έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii. Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-7)\ge0 \Leftrightarrow 36-4\lambda+28\ge0 \Leftrightarrow -4\lambda\ge-64\Leftrightarrow \lambda\le16$

β. i. $S=x_1+x_2=-\dfrac{-6}{1}=6$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\lambda-7}{1}=\lambda-7$

ii. Αν $7<\lambda<16$, τότε:
• $\lambda<16\Rightarrow\Delta>0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
• $\lambda>7\Rightarrow\lambda-7>0\Rightarrow P>0$, οπότε οι ρίζες είναι ομόσημες.
Επιπλέον είναι $S>0$, οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες θετικές.

γ. i. Η $(1)\Leftrightarrow x^2-6|x|+\lambda-7=0 \Leftrightarrow |x|^2-6|x|+\lambda-7=0$, (2).

Η (2) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, όταν η εξίσωση $y^2-6y+\lambda-7=0$ έχει δύο άνισες ρίζες θετικές. Από το **β.ii.** ερώτημα πρέπει $7<\lambda<16$.

ii. Είναι $7<3\sqrt{10}<16\Leftrightarrow 7^2<(3\sqrt{10})^2<16^2 \Leftrightarrow 49<9\cdot10<256$, που ισχύει.

Άρα για $\lambda=3\sqrt{10}$ η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

177 Θέμα 4 – 1487

α. i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.

β. i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

Λύση

α. i. Είναι:
- $\Delta=9^2-4\cdot1\cdot18=81-72=9$
- $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\dfrac{-9\pm3}{2}$. Οπότε $x_1=\dfrac{-6}{2}=-3$ και $x_2=\dfrac{-12}{2}=-6$.

ii. Είναι $|x+3|+|x^2+9x+18|=0\Leftrightarrow|x+3|=0$ και $|x^2+9x+18|=0\Leftrightarrow x+3=0$ και $x^2+9x+18=0$ $\Leftrightarrow x=-3$ και $(x=-3$ ή $x=-6)\Leftrightarrow x=-3$

β. i. Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$x^2+9x+18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii. Είναι $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18\Leftrightarrow x^2+9x+18=-(x^2+9x+18)$

$$\Leftrightarrow x^2+9x+18\le0\Leftrightarrow x\in[-6,-3]$$

178 Θέμα 4 – 1513

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$.

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

β. Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$$

γ. Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

Λύση

α. Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot3=4+12=16>0$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-2\pm4}{-2}$, οπότε $x_1=\dfrac{2}{-2}=-1$ και $x_2=\dfrac{-6}{-2}=3$.
Το πρόσημο του $f(x)$ φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

β. Είναι $-1<2{,}999<3$ και $-1{,}002<-1$. Οπότε $f(2{,}999)>0$ και $f(-1{,}002)<0$.
Άρα $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$.

γ. Έχουμε:
- $-3<\alpha<3\Rightarrow|\alpha|<3$, άρα $|\alpha|\in(-1,3)$
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-1,3)$

Οπότε για $x=|\alpha|\in(-1,3)$ έχουμε $f(|\alpha|)>0\Leftrightarrow-|\alpha|^2+2|\alpha|+3>0\Leftrightarrow-\alpha^2+2|\alpha|+3>0$.

179 Θέμα 4 – 1517

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\ge\dfrac{5}{2}x$ (1) .

β. Δίνονται δύο αριθμοί κ , λ , οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ .

ii. Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\ge\dfrac{3}{2}$.

Λύση

α. Είναι $x^2+1\ge \frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2+2\ge 5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0$, (2) .

Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει $\alpha=2>0$, διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$ και ρίζες τις $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}$, οπότε $x_1=\frac{8}{4}=2$ και $x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε ότι η $(2)\Leftrightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.

β. i. Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$ έχουμε ότι οι $\kappa-1$, $\lambda-1$ είναι ετερόσημοι. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

$\lambda-1>0$ και $\kappa-1<0 \Leftrightarrow \lambda>1$ και $\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa<1<\lambda$

2η περίπτωση

$\lambda-1<0$ και $\kappa-1>0 \Leftrightarrow \lambda<1$ και $\kappa>1 \Leftrightarrow \lambda<1<\kappa$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των κ , λ .

ii. Οι κ , λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) , οπότε $\kappa,\lambda\in(-\infty,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.

Επειδή το 1 είναι μεταξύ των κ , λ , θα είναι $\kappa\le\frac{1}{2}$ και $\lambda\ge 2$ ή $\lambda\le\frac{1}{2}$ και $\kappa\ge 2$.

► Αν $\kappa\le\frac{1}{2}$ και $\lambda\ge 2$ τότε:

- $\kappa<\lambda \Rightarrow \kappa-\lambda<0$, οπότε $|\kappa-\lambda|=\lambda-\kappa$
- $-\kappa\ge-\frac{1}{2}$ και $\lambda\ge 2$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε: $\lambda-\kappa\ge 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow |\kappa-\lambda|\ge\frac{3}{2}$.

► Αν $\lambda\le\frac{1}{2}$ και $\kappa\ge 2$ τότε $-\lambda\ge-\frac{1}{2}$ και $\kappa\ge 2$ τότε $\kappa>\lambda \Rightarrow \kappa-\lambda>0$, οπότε $|\kappa-\lambda|=\kappa-\lambda$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε: $\kappa-\lambda\ge-\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \kappa-\lambda\ge\frac{3}{2}$.

Άρα $|\kappa-\lambda|\ge\frac{3}{2}$.

180 Θέμα 4 – 1518

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$.

α. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

β. Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$$

Λύση

α. Είναι $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3 \Leftrightarrow \alpha\in(1,3)$.

β. i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=(\alpha-2)^2-1=(\alpha-2-1)(\alpha-2+1)=(\alpha-3)(\alpha-1)<0 \text{ , αφού } \alpha\in(1,3)$$

$2^{ος}$ τρόπος

Το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ έχει διακρίνουσα: $\Delta=[-(\alpha-2)]^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=\alpha^2-4\alpha+4-1=\alpha^2-4\alpha+3$.

Το τριώνυμο $\alpha^2-4\alpha+3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta'=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0 \text{ και}$$

ρίζες τις $\alpha_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}$, οπότε $\alpha_1=\frac{6}{2}=3$ και $\alpha_2=\frac{2}{2}=1$.

α	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\alpha^2-4\alpha+3$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα προσήμων έχουμε
$\alpha^2-4\alpha+3<0 \Leftrightarrow \Delta<0$, για κάθε $\alpha\in(1,3)$.

ii. Το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$, έχει διακρίνουσα $\Delta<0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, οπότε

$$x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

181 Θέμα 4 – 1458

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$.

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2) \text{ , } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ , } f(x_2+1)$$

Λύση

α. Είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Πρέπει $\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

γ. i. Είναι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2\Leftrightarrow x_1<\frac{x_1+x_2}{2}$ και $\frac{x_1+x_2}{2}<x_2\Leftrightarrow 2x_1<x_1+x_2$ και $x_1+x_2<2x_2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1<x_2$ και $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$, που ισχύει.

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1+x_2}{2}$		x_2		x_2+1	$+\infty$
$x^2-x+\lambda-\lambda^2$		+	0		−		0		+	

Είναι $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$, $f(x_2)=0$ και $f(x_2+1)>0$, οπότε

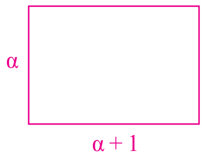
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_2)<f(x_2+1)$.

182 Θέμα 4 – 1520

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| > 1$.

γ. Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$. Αν για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:



i. Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

Λύση

α. Το τριώνυμο $x^2 + x - 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ και ρίζες τις

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, οπότε $x_1 = \frac{4}{2} = 2$ και $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε $x^2 + x - 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$.

β. Είναι $|x - \frac{1}{2}| > 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} < -1$ ή $x - \frac{1}{2} > 1$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} - 1$ ή $x > \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ή $x > \frac{3}{2}$.

γ. Είναι $\alpha > \frac{3}{2}$.

i. Έχουμε:
- $\alpha > 0$
- $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1 \overset{\beta.}{\Leftrightarrow} \alpha < -\frac{1}{2}$ ή $\alpha > \frac{3}{2} \overset{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha > \frac{3}{2}$
- $E < 6 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1) < 6 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 6 < 0 \overset{\alpha.}{\Leftrightarrow} -3 < \alpha < 2$. Άρα $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\alpha + 2(\alpha + 1) = 4\alpha + 2$.

Είναι $\frac{3}{2} < \alpha < 2 \overset{\cdot 4}{\Rightarrow} 6 < 4\alpha < 8 \Rightarrow 8 < 4\alpha + 2 < 10 \Rightarrow 8 < \Pi < 10$.

183 Θέμα 4 – 1522 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο ΠΡΟΟΔΟΙ

21. Αριθμητική πρόοδος

184 Θέμα 2 – 1240

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98 .

Λύση

α. Έχουμε:
- $\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\omega$, (1).
- $\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$

Άρα $\alpha_1 = -2$ και $\omega = 2$.

β. Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -2 + (\nu - 1)\cdot 2 = 2\nu - 4$.

Έστω $\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow \nu = 51$.

Άρα ο $51^{ος}$ όρος είναι ίσος με 98 .

185 Θέμα 2 – 1292 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

186 Θέμα 2 – 1325

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

β. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152 .

Λύση

α. Έχουμε $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow \alpha_1 + 24\omega = \alpha_1 + 11\omega + 39 \Leftrightarrow 13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$

β. Είναι $\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 152 \Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)\cdot 3 = 152 \Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 152$

$$\Leftrightarrow 3\nu - 1 = 152 \Leftrightarrow 3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{51} .

187 Θέμα 2 – 1326

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω .

α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Λύση

α. Είναι $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = \dfrac{\alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} = \dfrac{6\omega}{3\omega} = 2$

β. $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega = 18 \Leftrightarrow 6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$

188 Θέμα 2 – 1328 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

189 Θέμα 2 – 13319

Δίνονται οι αριθμοί $1-x$, $\frac{x}{2}$, $2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. **Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.**

β. **Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.**

Λύση

α. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α , β , γ , με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta-\alpha=\gamma-\beta$.Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι

$\frac{x}{2}-(1-x)=2x-1-\frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2}-1+x=\frac{3x}{2}-1$, άρα $\frac{3x}{2}-1=\frac{3x}{2}-1$ που ισχύει.

β. Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2}-1=5\Leftrightarrow\frac{3x}{2}=6\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=4$.

190 Θέμα 2 – 1245

α. **Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**

β. **Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν**

i. $x=1$ **ii.** $x=-1$

Λύση

α. Οι αριθμοί: $x+2$, $(x+1)^2$, $3x+2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$$x+2+3x+2=2(x+1)^2\Leftrightarrow 2(x+1)^2=4(x+1)\Leftrightarrow\Leftrightarrow 2\,(x^2+2x+1)=4\,(x+1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2=4x+4\Leftrightarrow 2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

β. i. Για $x=1$ οι αριθμοί είναι: 3, 4, 5, οπότε η διαφορά ω είναι $4-3=1$.

ii. Για $x=-1$ οι αριθμοί είναι: 1 , 0 , -1 , οπότε η διαφορά ω είναι $0-1=-1$.

191 Θέμα 2 – 1256

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .

α. **Να βρείτε τη τιμή του x .**

β. **Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) ,**

i. **να υπολογίσετε τη διαφορά ω .**

ii. **να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.**

Λύση

α. Είναι $A+\Gamma=2B\Leftrightarrow 1+x+8=2(x+4)\Leftrightarrow x+9=2x+8\Leftrightarrow -x=-1\Leftrightarrow x=1$.

β. Για $x=1$, έχουμε $A=1$, $B=5$, $\Gamma=9$, οπότε:

i. $\omega=B-A=5-1=4$

ii. $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=1+19\cdot 4=1+76=77$

192 Θέμα 2 – 1266

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta\in\mathbb{R}$.

α. **Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.**

β. **Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1 , β , x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.**

Λύση

α. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2\beta)^2 - 4\cdot 1(\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0$ και

ρίζες τις $x_{1,2} = \dfrac{2\beta \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2\beta \pm 4}{2}$.

Οπότε $x_1 = \dfrac{2\beta + 4}{2} = \dfrac{2(\beta+2)}{2} = \beta + 2$ και $x_2 = \dfrac{2\beta - 4}{2} = \dfrac{2(\beta-2)}{2} = \beta - 2$.

193 Θέμα 2 – 1249

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) , για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β. Να βρείτε τον α_{20} .

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

α. Είναι $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β. $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19\cdot 6 = 19 + 114 = 133$

γ. $S_{20} = \dfrac{20}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10\cdot(19 + 133) = 1520$

194 Θέμα 2 – 1343

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77 . (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$)

Λύση

α. Είναι $\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$.

β. $S_\nu = 77 \Leftrightarrow \dfrac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77 \Leftrightarrow \nu\cdot[4 + (\nu-1)\cdot 3] = 154 \Leftrightarrow \nu\,(4 + 3\nu - 3) = 154 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0$

Είναι $\Delta = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1848 = 1849$ και $\nu_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1849}}{6} = \dfrac{-1 \pm 43}{6}$.

Οπότε $\nu_1 = \dfrac{-1+43}{6} = 7$ και $\nu_2 = \dfrac{-1-43}{6}$, που απορρίπτεται.

Άρα $\nu = 7$, οπότε πρέπει να πάρουμε τους επτά πρώτους όρους.

195 Θέμα 2 – 1344 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

196 Θέμα 2 – 1370

α. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1 , 2 , 3 , … , ν

β. Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45 .

Λύση

α. Οι αριθμοί: 1 , 2 , 3 , … , ν είναι οι ν πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$.

Οπότε $1 + 2 + 3 ... + \nu = S_\nu = \dfrac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = \dfrac{\nu}{2}[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1] = \dfrac{\nu}{2}\,(2 + \nu - 1) = \dfrac{\nu}{2}\,(\nu+1) = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

β. Είναι $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \dfrac{\nu(\nu+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$.

Έχουμε:
- $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361$
- $\nu_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 19}{2}$. Οπότε $\nu_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ και $\nu_2 = \dfrac{-20}{2} = -10$, που απορρίπτεται.

Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

197 Θέμα 2 – 14573

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33 , να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Λύση

α. Είναι $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β. $S_3 = 33 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \cdot [2\alpha_1 + (3-1)\omega] = 33 \Leftrightarrow 3 \cdot (2\alpha_1 + 2 \cdot 5) = 66$

$\Leftrightarrow 6\alpha_1 + 30 = 66 \Leftrightarrow 6\alpha_1 = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

198 Θέμα 2 – 1336

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

Λύση

Είναι:

α. $x + 6 + 11x - 6 = 2 \cdot (5x + 2) \Leftrightarrow 12x = 10x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Οπότε οι αριθμοί είναι: 8 , 12 , 16 , επομένως $\omega = 12 - 8 = 4$.

β. $S_8 = \dfrac{8}{2} \cdot [2\alpha_1 + (8-1)\omega] = 4 \cdot (2 \cdot 0 + 7 \cdot 4) = 4 \cdot 28 = 112$.

199 Θέμα 2 – 1329

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι:

α. $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega + \alpha_1 + 10\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40$

$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β. $S_\nu = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\nu}{2} \cdot [2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + (\nu-1)\omega = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-10) + (\nu-1) \cdot 4 = 0$

$\Leftrightarrow -20 + 4\nu - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow \nu = 6$

200 Θέμα 2 – 1347 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

201 Θέμα 2 – 1247

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α. Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Λύση

α. Οι αριθμοί που παριστάνουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς, αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (\nu - 1)\cdot 20 = 120 + 20\nu - 20 = 20\nu + 100$.

β. Η τελευταία σειρά έχει: $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10 - 1)\omega = 120 + 9\cdot 20 = 120 + 180 = 300$ καθίσματα.

γ. Το γυμναστήριο έχει $S_{10} = \dfrac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = 5\,(120 + 300) = 5\cdot 420 = 2100$ καθίσματα.

202 Θέμα 4 – 1453 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

203 Θέμα 4 – 1507

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν) , τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3}$.

Λύση

α. Έχουμε:
- $\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega$, (1)
- $\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega = 61 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$.

β. Έστω $\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)\cdot 3 = 333 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 333 \Leftrightarrow 3\nu = 332$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3} \Leftrightarrow \nu = 110\frac{2}{3}\ , \text{ άτοπο, αφού } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Άρα ο αριθμός 333 δεν είναι όρος της προόδου.

γ. Είναι (α_ν): 4 , 7 , 10 , …

Έχουμε $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow 3x = 2y$, (1) . Έστω ότι οι x , y είναι διαδοχικοί όροι της (α_ν) .

Τότε $y = x + \omega$ ή $x = y + \omega \Leftrightarrow y = x + 3$ ή $x = y + 3$.

- Αν $y = x + 3$, τότε η (1) $\Leftrightarrow 3x = 2(x + 3) \Leftrightarrow 3x = 2x + 6 \Leftrightarrow x = 6$ που δεν είναι όρος της προόδου, αφού αν $\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 6 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)\cdot 3 = 6 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \dfrac{5}{3} \notin \mathbb{N}$.
- Αν $x = y + 3$, τότε η (1) $\Leftrightarrow 3(y + 3) = 2y \Leftrightarrow 3y + 9 = 2y \Leftrightarrow y = -9$, που δεν είναι όρος της προόδου, αφού $\alpha_\nu = -9 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = -9 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)\cdot 3 = -9 \Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = -9 \Leftrightarrow 3\nu = -10 \Leftrightarrow \alpha_\nu = -\dfrac{10}{3} \notin \mathbb{N}$.

Άρα οι x , y δεν είναι διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) .

204 Θέμα 4 – 1471

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

Λύση

α. Είναι $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1$, που είναι περιττός.

β. i. Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16$ και ρίζες τις $\kappa_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$,

άρα $\kappa_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ και $\kappa_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

Οπότε $\kappa = 3$ ή $\kappa = -1$, που απορρίπτεται.

Για $\kappa = 3$, έχουμε $\omega = 2\cdot 3 + 1 = 7$.

ii. Έστω $\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow 2 + (\nu-1)\cdot 7 = 1017 \Leftrightarrow 2 + 7\nu - 7 = 1017 \Leftrightarrow 7\nu - 5 = 1017 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = \frac{1022}{7} \Leftrightarrow \nu = 146 .$$

Άρα ο αριθμός 1017 είναι $146^{ος}$ όρος της προόδου.

205 Θέμα 4 – 12945

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν) , $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν) , $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56 .

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β. Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ. Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

Λύση

α. Ισχύουν: $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$, οπότε $\alpha_1 + 2\omega = 8$, (1) και $\alpha_1 + 10\omega = 32$ (2)·

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) βρίσκουμε

$$8\omega = 24 \Rightarrow \omega = 3$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\alpha_1 + 6 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

β. Η πρόοδος (β_ν) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = 57 + 2 = 59$ και

$$\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu-1) = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$$

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ. Το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) , οπότε έχουμε: $[2\alpha_1 + (2\nu-1)\cdot 3]\cdot\dfrac{2\nu}{2} = [2\beta_1 + (\nu-1)\cdot 2]\cdot\dfrac{\nu}{2}$, απ' όπου, με αντικατάσταση των πρώτων όρων, παίρνουμε $2\cdot 2 + (2\nu-1)\cdot 3 = 2(57 + \nu - 1)\cdot\dfrac{1}{2}$.

Η τελευταία ισότητα γράφεται $4 + 6\nu - 3 = 57 + \nu - 1$, απ' όπου προκύπτει ότι $5\nu = 55$, δηλαδή $\nu = 11$, που είναι η ζητούμενη τιμή του ν.

206 Θέμα 4 – 1399

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = x\ ,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4\ ,\ \alpha_3 = x^2 - 2\ ,\ \text{όπου}\ x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

β. Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 .

γ. Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

Λύση

α. Είναι $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$, (1)

Είναι:
- $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 3\cdot(-6) = 49 + 72 = 121$
- $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{121}}{2\cdot 3} = \dfrac{7 \pm 11}{6}$. Οπότε $x = \dfrac{18}{6} = 3$ ή $x = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Άρα $x = 3$.

β. Είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 2\cdot 9 - 3\cdot 3 - 4 = 5$, οπότε $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 2$.

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 3 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 1$.

Έστω $\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega = 2014 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)\,2 = 2014 \Leftrightarrow 3 + 2\nu - 2 = 2014$

$$\Leftrightarrow 2\nu = 2013 \Leftrightarrow \nu = \frac{2013}{2}\ ,\ \text{άτοπο αφού}\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα ο αριθμός 2014 , δεν είναι όρος της προόδου.

γ. Είναι $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος S σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 3$ και $\omega = 4$.

Για το πλήθος τους έχουμε:

$\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)\cdot 4 = 31\ .\ 3 + 4\nu - 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu - 1 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$.

Άρα $S_8 = \dfrac{8}{2}(\beta_1 + \beta_8) = 4\cdot(3 + 31) = 4\cdot 34 = 136$.

207 Θέμα 4 – 1502

Οι αριθμοί: $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β. Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii. Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$.

Λύση

α. Έχουμε $x^2 + 5 + 2x + 4 = 2(x^2 + x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 9 = 2x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

β. Αν $x = 3$, οι αριθμοί είναι: 14 , 12 , 10 .

i. Είναι $\omega = 12 - 14 = -2$.

ii. Έχουμε $\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\cdot(-2) = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$.

iii. Είναι $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\ldots+\alpha_{24}=S_{24}-S_{14}$.

Είναι:
- $S_{24}=\frac{24}{2}\cdot[2\alpha_1+(24-1)\omega]=12\,[2\cdot 20+23\cdot(-2)]=12\,(40-46)=12\cdot(-6)=-72$
- $S_{14}=\frac{14}{2}\cdot[2\alpha_1+(14-1)\omega]=7\,[2\cdot 20+13\cdot(-2)]=7\,(40-26)=7\cdot 14=98$

Άρα $S=-72-98=-170$.

208 Θέμα 4 – 1503

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8=23$.

α. Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$.

β. Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$.

Λύση

Είναι:

α. $\begin{cases}\alpha_3=8\\ \alpha_8=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+(3-1)\omega=8\\ \alpha_1+(8-1)\omega=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\omega=8\\ \alpha_1+7\omega=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=8-2\omega\\ 8-2\omega+7\omega=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=8-2\omega\\ 5\omega=15\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=8-2\cdot 3\\ \omega=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=2\\ \alpha_1=3\end{cases}$

β. $\alpha_{31}=\alpha_1+(31-1)\omega=2+30\cdot 3=92$.

γ. $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{31})+(1+2+3+\ldots+31)$

Είναι:
- $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{31}=S_{31}=\frac{31}{2}\cdot(\alpha_1+\alpha_{31})=\frac{31}{2}(2+92)=\frac{31}{2}\cdot 94=31\cdot 47=1457$
- $1+2+3+\ldots+31==\frac{31}{2}(1+31)=\frac{31}{2}\cdot 32=31\cdot 16=496$

Άρα $S=1457+496=1953$.

209 Θέμα 4 – 13173

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu=10+3\nu$.

α. i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

Λύση

α. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή: $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\left[10+3(\nu+1)\right]-(10+3\nu)=10+3\nu+3-10-3\nu=3$

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=10+3\cdot 1=13$ και η διαφορά $\omega=3$.

β. Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$14<\alpha_\nu<401\Leftrightarrow 14<10+3\nu<401\Leftrightarrow 4<3\nu<391\Leftrightarrow\frac{4}{3}<\nu<\frac{391}{3}\Leftrightarrow 1,\overline{3}<\nu<130,\overline{3}$

Οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{130}$ που είναι 129 όροι.

γ. Έχουμε:

$$\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{130}=S_{130}-\alpha_1=\frac{130}{2}(2\alpha_1+129\cdot\omega)-\alpha_1=65(2\cdot 13+129\cdot 3)-13=26832$$

210 Θέμα 4 – 13171

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$$\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=S_\nu=2\nu^2+3\nu\,,\ \nu\in\mathbb{N}\ \text{με}\ \nu\geq 1}$$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

β. Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1}=2\nu^2-\nu-1$, $\nu\geq 2$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=4\nu+1$, $\nu\geq 1$.

δ. Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

Λύση

α. Προφανώς $\alpha_1=S_1=2\cdot 1^2+3\cdot 1=5$.

β. Θέτοντας όπου ν το $\nu-1$, παίρνουμε:

$S_{\nu-1}=2(\nu-1)^2+3(\nu-1)=2(\nu^2-2\nu+1)+3\nu-3=2\nu^2-4\nu+2+3\nu-3=2\nu^2-\nu-1$ για κάθε $\nu\geq 2$.

γ. Για κάθε $\nu\geq 2$, έχουμε

$\alpha_\nu=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{\nu-1})=$

$=S_\nu-S_{\nu-1}=2\nu^2+3\nu-(2\nu^2-\nu-1)=2\nu^2+3\nu-2\nu^2+\nu+1=4\nu+1$

Αλλά $\alpha_1=5=4\cdot 1+1$. Ώστε $\alpha_\nu=4\nu+1$, για κάθε $\nu\geq 1$.

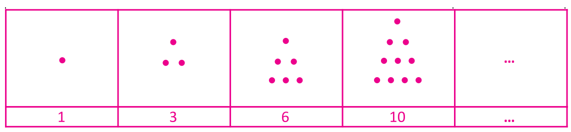
δ. Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\left[4(\nu+1)+1\right]-[4\nu+1]=4\nu+4+1-4\nu-1=4$.

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.

211 Θέμα 4 – 13056

Οι αριθμοί 1 , 3 , 6 , 10 ,... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στο διπλανό πίνακα λέγονται τριγωνικοί.



Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

α. Να βρείτε τον $10^{ο}$ τριγωνικό αριθμό.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Λύση

α. Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι $T_{10}=\dfrac{10\cdot 11}{2}=55$.

β. Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu=120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu=120\Leftrightarrow\frac{\nu(\nu+1)}{2}=120\Leftrightarrow\nu(\nu+1)=240\Leftrightarrow\nu^2+\nu-240=0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=961$ και οι ρίζες της $\nu_1=15$ και $\nu_2=-16$.

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15.

Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός $(T_{15}=120)$.

γ. Έστω T_ν και $T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+\nu+2) = \frac{1}{2}(\nu+1)\cdot 2(\nu+1) = (\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

212 Θέμα 4 – 1416

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Λύση

α. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=12$ και $\omega=2$.

Η μεσαία σειρά είναι η 13^η $\left(\frac{25+1}{2}=13\right)$.

Τα καθίσματα της:
- μεσαίας σειράς είναι $\alpha_{13}=\alpha_1+(13-1)\omega=12+12\cdot 2=36$
- τελευταίας σειράς είναι $\alpha_{25}=\alpha_1+(25-1)\omega=12+24\cdot 2=60$

β. Η χωρητικότητα του σταδίου είναι $S_{25}=\frac{25}{2}\cdot[2\alpha_1+(25-1)\omega]=\frac{25}{2}\cdot(2\cdot 12+24\cdot 2)=$

$$=\frac{25}{2}(24+48)=\frac{25}{2}\cdot 72=25\cdot 36=900 \text{ καθίσματα.}$$

γ. Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι $S=\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\ldots+\alpha_{14}=S_{14}-S_6$.

Είναι:
- $S_{14}=\frac{14}{2}(2\alpha_1+13\omega)=7\cdot(2\cdot 12+13\cdot 2)=7\cdot(24+26)=7\cdot 50=350$
- $S_6=\frac{6}{2}(2\alpha_1+5\omega)=3\cdot(2\cdot 12+5\cdot 2)=3\cdot(24+10)=3\cdot 34=102$

Άρα $S=350-102=248$.

213 Θέμα 4 – 12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α. Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν–οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω .

β. Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ. Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

Λύση

α. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$.

Είναι $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow 50 = \alpha_1 + 9 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 50 - 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 32$.

Άρα $\alpha_1 = 32$ και $\omega = 2$.

β. Είναι $S_{40} = \frac{40}{2}(2 \cdot 32 + 39 \cdot 2) = 20(64 + 78) = 20 \cdot 142 = 2.840$.

γ. Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36 , οπότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\omega_1 = 4$.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου είναι 20 .

Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 32 + 19 \cdot 4) = 10(64 + 76) = 10 \cdot 140 = 1.400$$

214 Θέμα 4 – 12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α. Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β. Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ. Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ. Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

Λύση

α. Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Είναι $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 255 = 300 + 3\omega \Leftrightarrow \omega = -15$.

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β. Είναι $\alpha_\nu = 45 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 45 \Leftrightarrow 300 + (\nu - 1)(-15) = 45$

$$\Leftrightarrow 300 - 15\nu + 15 = 45 \Leftrightarrow 15\nu = 270 \Leftrightarrow \nu = 18$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{18} = S_{18}$$

Είναι $S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) = 9(300 + 45) = 9 \cdot 345 = 3105$.

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης είναι 3105 δευτερόλεπτα, δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα.

δ. Αν β_ν είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο ν, τότε έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\beta_1=147$ και $\omega=3$. Πρέπει να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu\in\mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu\le\alpha_\nu$. Δηλαδή:

Είναι $\beta_\nu\le\alpha_\nu \Leftrightarrow 147+(\nu-1)3\le 300+(\nu-1)(-15)\Leftrightarrow 144+3\nu\le 315-15\nu$

$$\Leftrightarrow 18\nu\le 171\Leftrightarrow \nu\le\frac{171}{18}\Leftrightarrow \nu\le 9{,}5$$

Άρα η μέγιστη τιμή του ν είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

215 Θέμα 4 – 1411

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του A. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη A, η δεύτερη 4 μέτρα από το A, η τρίτη 7 μέτρα από το A και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη A, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α. **Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη A αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^{o} όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;**

β. **Σε πόση απόσταση από την αποθήκη A είναι η 20^{η} κυψέλη;**

γ. **Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη A συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη A.**

  i. **Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^{η} κυψέλη;**

  ii. **Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;**

Λύση

α. Αφού κάθε επόμενη κυψέλη απέχει 3 μέτρα από την προηγούμενη, οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη A, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\omega=3$.

Ο πρώτος όρος εκφράζει πόσο απέχει η 1^{η} κυψέλη από την αποθήκη Α, ενώ η διαφορά ω, την απόσταση που απέχει κάθε επόμενη κυψέλη από την προηγούμενη.

β. Η απόσταση της $20^{\eta\varsigma}$ κυψέλης από την αποθήκη A είναι: $\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega=1+19\cdot 3=58$ μέτρα.

γ. i. Η ζητούμενη απόσταση είναι το διπλάσιο του αθροίσματος $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, αφού πηγαίνει στην κάθε κυψέλη και γυρνάει στην αποθήκη. Είναι $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1+4+7=12$ μέτρα.

Οπότε θα διανύσει $2\cdot 12=24$ μέτρα.

ii. Η ζητούμενη απόσταση είναι

$$S=2\cdot S_{20}=2\cdot\frac{20}{2}\cdot[2\alpha_1+(20-1)\cdot\omega]=20\cdot(2\cdot 1+19\cdot 3)=20(2+57)=20\cdot 59=1180 \text{ μέτρα}$$

216 Θέμα 4 – 1430

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3 , 7 , 11 , 15 , … και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4 . Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ. Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235 . Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Λύση

α. Οι αριθμοί 3 , 7 , 11 , 15 , … είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) , διότι κάθε επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο, αφού προσθέσουμε το 4 .

β. Η (α_ν) έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$. Οπότε:

$$S_{40} = \frac{40}{2} \cdot [2\alpha_1 + (40-1)\omega] = 20 \cdot (2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6+156) = 20 \cdot 162 = 3240 .$$

γ. Έστω $\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1) \cdot 4 = 120$

$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \notin \mathbb{N}$$

Άρα ο αριθμός 120 δεν είναι ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ. Είναι $\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1) \cdot 4 = 235 \Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow 4\nu = 236$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{236}{4} \Leftrightarrow \nu = 59$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $S = S_{59} - S_{40}$.

Έχουμε:

$$S_{59} = \frac{59}{2} \cdot [2\alpha_1 + (59-1)\omega] = \frac{59}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 58 \cdot 4) = \frac{59}{2}(6+232) = \frac{59}{2} \cdot 238 = 59 \cdot 169 = 7021 \text{ και } S_{40} = 3240 .$$

Άρα $S = 7021 - 3240 = 3781$.

217 Θέμα 4 – 13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α. i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β. Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ. Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, \dots, 7$.

Λύση

α. i. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2, με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$$

ii. Η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2, με $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 13 + (\nu-1)\cdot(-2) = 13 - 2\nu + 2 = 15 - 2\nu$$

β. Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε ν μέρες. Τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$

δηλαδή :

$$\frac{\big(2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 2\big)\cdot\nu}{2} = \frac{\big(2\cdot 13 + (\nu-1)\cdot(-2)\big)\cdot\nu}{2} \Leftrightarrow \frac{(2+2\nu-2)\cdot\nu}{2} = \frac{(26-2\nu+2)\cdot\nu}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\nu\cdot\nu}{2} = \frac{(28-2\nu)\cdot\nu}{2}.$$

Και αφού $\nu \neq 0$, θα είναι $2\nu = 28 - 2\nu \Leftrightarrow 4\nu = 28 \Leftrightarrow \nu = 7$.

γ. Προφανώς ανεξάρτητα από τον τρόπο που διάβασε το βιβλίο, το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι το $S_7 = \dfrac{\big(2\cdot 1 + (7-1)\cdot 2\big)\cdot 7}{2} = 49$.

δ. Για κάθε $\nu = 1, 2, \dots, 7$,

είναι $\beta_{8-\nu} = \beta_1 + (8-\nu-1)\cdot(-2) = 13 - 16 + 2\nu + 2 = 2\nu - 1 = \alpha_\nu$.

218 Θέμα 4 – 1435

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 1 ευρώ, το 2^o μήνα 2 ευρώ, τον 3^o μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^o μήνα 100 ευρώ, το 2^o μήνα 110 ευρώ, τον 3^o μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α. i. Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii. Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β

iii. Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α .

iv. Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β .

β. i. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii. Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Λύση

α. i. Οι αριθμοί που εκφράζουν τα ποσά κατάθεσης, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$. Οπότε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$.

ii. Οι αριθμοί που εκφράζουν τα ποσά κατάθεσης, αποτελούν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 100$ και διαφορά $\omega = 10$, οπότε: $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega = 100 + (\nu-1)\cdot 10 = 10\nu + 90$

iii. Είναι $A_\nu = S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$.

iv. Είναι $B_\nu = S_\nu = \dfrac{\nu}{2}\cdot[2\beta_1 + (\nu-1)\omega] = \dfrac{\nu}{2}[2\cdot 100 + (\nu-1)\cdot 10] = \dfrac{\nu}{2}(10\nu + 190) = 5\nu^2 + 95\nu$.

β. i. Είναι $A_6 = 2^6 - 1 = 63$ € και $B_6 = 5\cdot 6^2 + 95\cdot 6 = 750$ € .

ii. Είναι $A_{12} = S_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$ € και $B_{12} = 5\cdot 12^2 + 95\cdot 12 = 1860$ € .

Άρα με το πρόγραμμα Α θα έχουμε μεγαλύτερο ποσό.

219 Θέμα 4 – 1387

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναιδιαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β. Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ. Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

Λύση

α. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), διότι κάθε επόμενος προκύπτει από τον προηγούμενο αφού του προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.
Ο $1^{ος}$ όρος της προόδου είναι ο $\alpha_1 = 16$.

Έχουμε $\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + (7-1)\omega = 28 \Leftrightarrow 16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow \omega = 2$

β. Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 16 + (\nu-1)\cdot 2 = 2\nu + 14$.

γ. Όλο το θέατρο έχει $S_{20} = \frac{20}{2}\cdot[2\alpha_1 + (20-1)\omega] = 10\cdot(2\cdot 16 + 19\cdot 2) = 10(32+38) = 700$ καθίσματα.

δ. i. Οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των κενών καθισμάτων αποτελούν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = 6$ και διαφορά $\omega' = 3$.

Είναι $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega' = 6 + (\nu-1)\cdot 3 = 3\nu + 3$.

Έχουμε $\beta_\nu \geq \alpha_\nu \Leftrightarrow 3\nu + 3 \geq 2\nu + 14 \Leftrightarrow \nu \geq 11$. Άρα από την $11^η$ σειρά και μετά θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii. Οι θεατές είναι $S = S_{10} - S'_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] - \frac{10}{2}[2\beta_1 + (10-1)\omega'] = 5\cdot(2\cdot 16 + 9\cdot 2) - 5\cdot(2\cdot 6 + 9\cdot 3) =$

$$= 5\,(32+18) - 5\cdot(12+27) = 250 - 195 = 55$$

220 Θέμα 4 – 1395

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

α. Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β. Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ. Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

δ. Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10.201} = 101$)

Λύση

α. Ο $2^{ος}$, ο $3^{ος}$ και ο $4^{ος}$ θα πληρώνουν αντί-στοιχα $3 + 0{,}5 = 3{,}5€$, $3{,}5 + 0{,}5 = 4€$ και $4 + 0{,}5 = 4{,}5$ €.

β. Αν α_ν τα ποσά που θα πληρώσουν οι επιβάτες, τότε αυτά είναι όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 0{,}5$.

γ. Ο $51^{ος}$ επιβάτης, θα πληρώσει $\alpha_{51} = \alpha_1 + (51-1)\omega = 3 + 50\cdot 0{,}5 = 3 + 25 = 28€$.

δ. Είναι $S_\nu > 30\cdot 21 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] > 630 \Leftrightarrow \nu\cdot[2\cdot 3 + (\nu-1)\cdot 0{,}5] > 1260$

$$\Leftrightarrow \nu\left(6 + \frac{\nu-1}{2}\right) > 1260 \Leftrightarrow \nu\cdot\frac{12+\nu-1}{2} > 1260 \Leftrightarrow \nu\,(\nu+11) > 2520$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + 11\nu - 2520 > 0\ ,\ (1)$$

Είναι:
- $\Delta = 11^2 - 4\cdot 1\cdot(-2520) = 121 + 10080 = 10201$
- $\nu_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{10201}}{2\cdot 1} = \frac{-11 \pm 101}{2}$. Οπότε $\nu_1 = \frac{90}{2} = 45$, $\nu_2 = \frac{-112}{26} = -56$

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow \nu < -56$ ή $\nu > 45 \overset{\nu>0}{\Leftrightarrow} \nu > 45$.
Άρα θα πρέπει να πουλούσε τουλάχιστον 46 εισιτήρια.

ν	$-\infty$	-56		45	$+\infty$
$\nu^2 + 11\nu - 2520$	+	0	−	0	+

221 Θέμα 4 – 1488

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α. **Να βρείτε την τιμή του x .**

β. **Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.**

γ. **Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν , δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.**

Λύση

α. Οι μαθητές είναι $x(x-1)$ ή $(x+3)(x-3)-1$.

Είναι $x(x-1)=(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2-x=x^2-9-1 \Leftrightarrow -x=-10 \Leftrightarrow x=10$.

β. Η Α΄ τάξη έχει $10\cdot(10-1)=90$ μαθητές.

γ. Οι μαθητές στις ομάδες εργασίας είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=2$, $\omega=2$ και $S_\nu=90$.

Είναι $S_\nu=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 2]=90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4+2\nu-2)=90$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(2\nu+2)=90 \Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$$

Είναι:
- $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-90)=1+360=361$
- $\nu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm19}{2}$. Οπότε $\nu=9$ ή $\nu=-10$, που απορρίπτεται .

Άρα θα δημιουργηθούν 9 ομάδες.

22. Γεωμετρική πρόοδος

222 Θέμα 2 – 1360

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α. **Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.**

β. **Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$.**

Λύση

Είναι:

α. $\begin{cases}\alpha_3=1\\ \alpha_5=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^{3-1}=1\\ \alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^2=1 & ,\ (1)\\ \alpha_1\cdot\lambda^4=4 & ,\ (2)\end{cases}$

Η $(1) \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{1}{\lambda^2}$, οπότε η (2) γίνεται $\frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda^4=4 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=2$.

Άρα $\alpha_1=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

β. $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1}=\frac{2^{\nu-1}}{2^2}=2^{\nu-1-2}=2^{\nu-3}$.

223 Θέμα 2 – 12763

Δίνεται μία πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2\,,\,2\sqrt{2}\,,\,4\,,\,4\sqrt{2}\,,\,\ldots$.

α. Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

Λύση

α. Για να αποτελούν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}\ ,\ \text{άτοπο}$$

Άρα η α_ν δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

β. Είναι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, οπότε η α_ν αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Έχουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2 \cdot (\sqrt{2})^{\nu-1}$.

224 Θέμα 2 – 12787

α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

β. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2\,,\,\kappa\,,\,2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

Λύση

α. Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot(-6) = 25 > 0$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες που είναι $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, οπότε $x_1 = \frac{6}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-4}{2} = -2$.

β. Οι αριθμοί $\kappa - 2$, κ , $2\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ με $\kappa > 0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, όταν

$$\kappa^2 = (2\kappa+3)(\kappa-2) \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\kappa^2 - 4\kappa - 6 + 3\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 3 \ \text{ ή } \ \kappa = -2\ ,\ \text{που απορρίπτεται}$$

Άρα $\kappa = 3$.

225 Θέμα 2 – 1242

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x + 1$, $5x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

Λύση

Είναι:

α. $(2x+1)^2 = x(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

β. i. Για $x = 1$ οι αριθμοί είναι 1 , 3 , 9 , οπότε $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii. Για $x = -1$ οι αριθμοί είναι: -1 , -1 , -1 , οπότε $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

226 Θέμα 2 – 1257

α. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Λύση

α. Είναι $2x=4-x+2 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$.

β. Είναι $x^2=(4-x)\cdot 2 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

Έχουμε:
- $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$
- $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 6}{2}$

Οπότε $x=-4$ ή $x=2$.

γ. Από τα **α.**, **β.** ερωτήματα έχουμε $x=2$.
Για $x=2$ οι αριθμοί είναι: 2 , 2 , 2 και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\omega=0$ και γεωμετρικής με $\lambda=1$.

227 Θέμα 2 – 1265

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0$ (1) , με παράμετρο $\beta>0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\dfrac{\beta}{2}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) , να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Λύση

α. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5\beta)^2-4\cdot 2\cdot 2\beta^2=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2>0$, για κάθε $\beta>0$ και ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{5\beta\pm\sqrt{9\beta^2}}{4}=\dfrac{5\beta\pm 3\beta}{4}$. Οπότε $x_1=\dfrac{5\beta+3\beta}{4}=2\beta$ και $x_2=\dfrac{5\beta-3\beta}{4}=\dfrac{\beta}{2}$.

β. Οι αριθμοί x_1, β , x_2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν
$\beta^2=x_1x_2 \Leftrightarrow \beta^2=2\beta\cdot\dfrac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta^2=\beta^2$, που ισχύει.

228 Θέμα 2 – 1311

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) .

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β. i. Να εκφράσετε το 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

Λύση

α. Έχουμε $(2\kappa)^2=(\kappa-2)(7\kappa+4) \Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8 \Leftrightarrow -3\kappa^2+10\kappa+8=0 \Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$.

Είναι $\Delta=(-10)^2-4\cdot 3\cdot(-8)=100+96=196>0$ και $\kappa_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{196}}{6}=\dfrac{10\pm 14}{6}$.

Οπότε $\kappa_1=\dfrac{10+14}{6}=4$ και $\kappa_2=\dfrac{10-14}{6}=-\dfrac{2}{3}$, που απορρίπτεται, αφού $\kappa\in\mathbb{N}$.

Άρα $\kappa = 4$ και οι αριθμοί είναι 2 , 8 , 32 , οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β. i. Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda = 4\alpha_1$, $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^{5-1} = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = \alpha_1 \cdot 4^4 = 256\alpha_1$, $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^{4-1} = \alpha_1 \cdot \lambda^3 = \alpha_1 \cdot 4^3 = 64\alpha_1$.

ii. $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4) \Leftrightarrow 4\alpha_1 + 256\alpha_1 = 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) \Leftrightarrow 260\alpha_1 = 260\alpha_1$, που ισχύει.

229 Θέμα 2 – 1321

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Λύση

α. Οι δοσμένοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) , αν και μόνο αν

$(2-x)^2 = (x+4)(6-x) \Leftrightarrow 4-4x+x^2 = 6x - x^2 + 24 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

Είναι:
- $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49$
- $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 7}{2}$

Οπότε $x=5$ ή $x=-2$.

β. i. Για $x=5$, οι αριθμοί είναι: 9 , -3 , 1 .

Οπότε ο λόγος είναι $\lambda = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$.

ii. Είναι $\alpha_4 = 6-x \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{4-1} = 6-5 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot (-\frac{1}{3})^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 . \left(-\frac{1}{27}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha_1}{27} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -27$.

230 Θέμα 2 – 1339

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200 , να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

Λύση

α. Είναι $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^{5-1}}{\alpha_1 \cdot \lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

β. Έχουμε $S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{3^4-1}{3-1} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{81-1}{2} = 200 \Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$

231 Θέμα 4 – 1499

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x>0$.

α. Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β. Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ. Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i. Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

ii. Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu+24)=\beta_7$.

Λύση

α. Είναι $2x=2+8 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$. Τότε οι αριθμοί είναι 2, 5, 8. Η διαφορά είναι $\omega=5-2=3$.

β. Είναι $x^2=2\cdot 8 \Leftrightarrow x^2=16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=4$. Τότε οι αριθμοί είναι 2, 4, 8. Ο λόγος είναι $\lambda=\frac{4}{2}=2$.

γ. i. Είναι $S_\nu=\frac{\nu}{2}\cdot[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]=\frac{\nu}{2}\cdot[2\cdot 2+(\nu-1)\cdot 3]=\frac{\nu}{2}(4+3\nu-3)=\frac{\nu}{2}(3\nu+1)=\frac{3\nu^2+\nu}{2}$

ii. Είναι $2(S_\nu+24)=\beta_7 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{3\nu^2+\nu}{2}+24\right)=\beta_1\cdot\lambda^{7-1} \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=2\cdot 2^6 \Leftrightarrow 3\nu^2+\nu+48=128$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2+\nu-80=0 .$$

Είναι $\Delta=1^2-4\cdot 3\cdot(-80)=1+960=961>0$ και $\nu_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{961}}{6}=\frac{-1\pm 31}{6}$.

Οπότε $\nu_1=\frac{-1+31}{6}=5$ και $\nu_2=\frac{-1-31}{6}=-\frac{16}{3}\notin\mathbb{N}^*$ που απορρίπτεται. Άρα $\nu=5$.

232 Θέμα 4 – 1519

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3=4 \ , \ \alpha_5=16 \ \text{ και } \ \lambda>0$$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $(\beta_\nu)=\frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ. Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10}=\frac{1}{2^9}S_{10}$.

Λύση

α. Έχουμε:

- $\alpha_3=4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^{3-1}=4 \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{4}{\lambda^2}$, (1)
- $\alpha_5=16 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\lambda^4=16 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{4}{\lambda^2}\cdot\lambda^4=16 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda=2$

Άρα $\alpha_1=\frac{4}{2^2}=1$.

β. Είναι $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}}=\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}=\frac{\alpha_\nu}{\lambda\cdot\alpha_\nu}=\frac{1}{\lambda}$.

Άρα η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

γ. Είναι $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$ και $\lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$, οπότε:

- $S'_{10} = \beta_1 \cdot \frac{(\lambda')^{10} - 1}{\lambda' - 1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2\,(1-2^{10})}{2^{10}} = -\frac{1-2^{10}}{2^9} = \frac{1}{2^9} \cdot (2^{10} - 1)$

- $S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1$.

Άρα $S'_{10} = \frac{1}{2^9} \cdot S_{10}$.

233 Θέμα 4 – 12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί $\kappa, \lambda (\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α. Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ. Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, $(\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

Λύση

α. Για να είναι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει

$\kappa^2 = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{\kappa \cdot \kappa \cdot \lambda}{\lambda} \Leftrightarrow \kappa^2 = \kappa^2$, που ισχύει.

β. Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$ έχουν άθροισμα:

$$\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \frac{\kappa + \kappa\lambda + \kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)$$

Είναι $\frac{\kappa}{\lambda} \neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$.

Το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

γ. Για την εξίσωση $x^2 + 10x + 16 = 0$ έχουμε:

- $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$, οπότε

$$\frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = 16 \Leftrightarrow \kappa^2 = 16 \Leftrightarrow |\kappa| = 4 \Leftrightarrow \kappa = 4 \text{ , αφού } \kappa > 0$$

- $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-10}{1} = -10$, οπότε

$$\frac{4}{\lambda} + 4\lambda = -10 \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 = -10\lambda \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 + 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9>0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-5\pm 3}{4}$

Άρα $\lambda=-2$ ή $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, που είναι δεκτές.

Για $\lambda=-2$ οι αριθμοί είναι $-2,4,-8$, ενώ για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8,\ 4,\ -2$.

234 Θέμα 4 – 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{81}{2}$, $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7$.

β. Αν $\alpha_7=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν–οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ. Αν $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$.

Λύση

α. i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta=\alpha+\gamma$ δηλαδή:

$81=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}+\dfrac{81\sqrt{3}}{2}=54\sqrt{3}$, επομένως $\dfrac{81}{54}=\sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\dfrac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$\left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7\right)^2\Leftrightarrow\dfrac{27^2\cdot 3}{4}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{3})^{14}\Leftrightarrow\dfrac{3^6\cdot 3}{4}=\dfrac{1}{4}\cdot 3^7$, το οποίο ισχύει.

β. Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda=\dfrac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{2}}=\sqrt{3}$.

Ο ν–οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}=\alpha_1(\sqrt{3})^{\nu-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ έχουμε ότι $\alpha_1\cdot(\sqrt{3})^{7-1}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^7$,οπότε

$\alpha_1=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3})^{7-6}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_\nu=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{3})^{\nu-1}=\dfrac{(\sqrt{3})^\nu}{2}$.

γ. Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}^{10}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$$

235 Θέμα 4 – 1498

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $E=1$.

β. Αν $\alpha+\beta=10$ τότε:

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β.

ii. Να βρείτε τα μήκη α, β.

Λύση

α. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=\alpha\cdot\beta$.

Επειδή οι: α, Ε, β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, έχουμε $E^2=\alpha\cdot\beta$, οπότε:

$E^2=E\Leftrightarrow E^2-E=0\Leftrightarrow E\,(E-1)=0\overset{E>0}{\Leftrightarrow}E=1$.

β. i. Έχουμε $S=\alpha+\beta=10$ και $P=\alpha\cdot\beta=E=1$.

Άρα η εξίσωση είναι $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-10x+1=0$.

ii. Τα μήκη α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-10x+1=0$, που έχει

$\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot1=100-4=96>0$ και

ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{96}}{2}=\dfrac{10\pm\sqrt{16\cdot6}}{2}=\dfrac{10\pm4\sqrt{6}}{2}=5\pm2\sqrt{6}$.

Άρα $(\alpha=5+2\sqrt{6}$ και $\beta=5-2\sqrt{6})$ ή $(\alpha=5-2\sqrt{6}$ και $\beta=5+2\sqrt{6})$.

236 Θέμα 4 – 1392

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α. Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα.

β. Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ. Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Λύση

α. Οι επιφάνειες της θάλασσας που καλύπτουν το πετρέλαιο κάθε ημέρα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=3$ και $\lambda=2$. Στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο είναι

$\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=3\cdot2^4=48$ τετραγωνικά μίλια.

β. Είναι $\alpha_\nu=768\Leftrightarrow\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=768\Leftrightarrow3\cdot2^{\nu-1}=768\Leftrightarrow2^{\nu-1}=256\Leftrightarrow2^{\nu-1}=2^8\Leftrightarrow\nu-1=8\Leftrightarrow\nu=9$.

Άρα, μετά από 9 ημέρες το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.

γ. Από το **β.** ερώτημα στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας το πετρέλαιο καλύπτει 768 τ.μ. Από την $10^{η}$ ημέρα και μετά, οι επιφάνειες που καλύπτει το πετρέλαιο κάθε ημέρα σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (β_ν) με

$\beta_1 = 768 - 6 = 762$ και $\omega = -6$.

Είναι $\beta_\nu = 12 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 12 \Leftrightarrow 762 + (\nu - 1)\cdot(-6) = 12 \Leftrightarrow 762 - 6\nu + 6 = 12$

$\Leftrightarrow 768 - 6\nu = 12 \Leftrightarrow -6\nu = -756 \Leftrightarrow \nu = 126$.

Άρα, μετά από $9 + 126 = 135$ ημέρες η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

237 Θέμα 4 – 1394

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β. Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400 , ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες.

Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$.

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

Λύση

α. Αν α_ν το πλήθος των βακτηρίων μετά από ν ώρες, τότε η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 102.400$ και $\lambda = \frac{1}{2}$. Μετά από 6 ώρες θα υπάρχουν $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^{6-1} = 102.400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{102.400}{64} = 3.200$ βακτήρια.

β. i. Οι όροι της ακολουθίας (β_ν) αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, αφού κάθε επόμενος όρος προκύπτει από τον προηγούμενο, αφού τον πολλαπλασιάσουμε με το 3 . Είναι $\beta_1 = 3.200 \cdot 3 = 9.600$ και $\lambda = 3$.

ii. Είναι $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 9.600 \cdot 3^{\nu-1}$

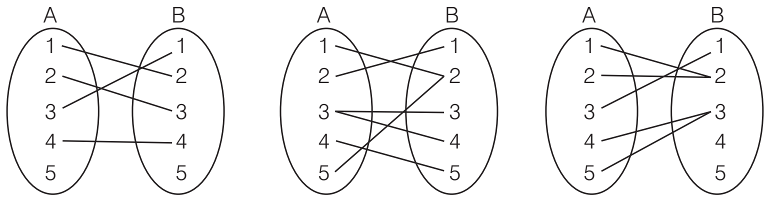
iii. Τα βακτήρια που θα υπάρχουν μετά από 3 ώρες είναι $\beta_3 = 9.600 \cdot 3^{3-1} = 9.600 \cdot 9 = 86.400$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $6^{ο}$ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

23. Η έννοια της συνάρτησης

238 Θέμα 2 – 12908

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

α. **Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.**

β. **Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,**

- **i.** **Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.**
- **ii.** **Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f.**
- **iii.** **Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.**

Λύση

α. Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 5 του συνόλου A δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 3 του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

β. **i.** Το πεδίο ορισμού είναι το $A=\{1,2,3,4,5\}$.

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(A)=\{1,2,3\}$.

iii. Είναι $f(1)=f(2)=2$.

239 Θέμα 2 – 12997

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της A' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της A' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της A' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f:A\to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g:B\to A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α. **Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f:A\to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.**

β. **Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g:B\to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.**

Λύση

α. Η αντιστοίχιση $f:A\to B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο B, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου A σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου B.

β. Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

240 Θέμα 2 – 13031

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2$, $x=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$.

β. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

γ. Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

Λύση

Έχουμε: • $G(2)=\dfrac{2\cdot 2+3}{2-4}=\dfrac{4+3}{-2}=-\dfrac{7}{2}$,

• $G(0)=\dfrac{2\cdot 0+3}{0-4}=-\dfrac{3}{4}$,

• $G(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}{-\dfrac{1}{2}-4}=\dfrac{-1+3}{-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{2}{-\dfrac{9}{2}}=-\dfrac{4}{9}$.

β. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ. Αναζητούμε την τιμή του $x\neq 4$ για την οποία:

$$G(x)=3 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-4}=3 \Leftrightarrow 2x+3=3(x-4) \Leftrightarrow 2x+3=3x-12 \Leftrightarrow x=15$$

241 Θέμα 2 – 1255

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$

Λύση

α. Πρέπει $x^2-x-6\neq 0$. Το τριώνυμο x^2-x-6 έχει διακρίνουσα:

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25>0$ και ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 5}{2}$. Άρα $x_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{-4}{2}=-2$.

Οπότε πρέπει $x\neq 3$ και $x\neq -2$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{3,-2\}$.

β. Είναι: • $f(2)=\dfrac{2+2}{2^2-2-6}=\dfrac{4}{4-2-6}=\dfrac{4}{-4}=-1$

• $f(4)=\dfrac{4+2}{4^2-4-6}=\dfrac{6}{16-4-6}=\dfrac{6}{6}=1$

Άρα $f(2)+f(4)=-1+1=0$.

242 Θέμα 2 – 12765

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς -1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 6 , είναι αυτό δυνατό.

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=[2,+\infty)$.

β. Από τους αριθμούς: $-1,\frac{\sqrt{2}}{2},6$, ισχύει ότι $6\in A$, οπότε είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης. Είναι $f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$.

Επειδή $-1<2$ και $\frac{\sqrt{2}}{2}<2$, έχουμε ότι $-1\notin A$ και $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin A$.

Άρα για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

243 Θέμα 2 – 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$ και $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

β. Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

γ. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x+5\geq 0$ δηλαδή όταν $x\geq -5$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g=[-5,+\infty)$.

β. $f(-1)=1-3\cdot(-1)=1+3=4$ και $g(11)=\sqrt{11+5}=\sqrt{16}=4$.

Άρα $f(-1)=g(11)$.

γ. Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία:

$$f(x)=g(4)\Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{4+5}\Leftrightarrow 1-3x=3\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

244 Θέμα 2 – 1244

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$.

Λύση

α. Είναι:
- $f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2$.
- $f(3)=3-1=2$.

Άρα $f(-1)=f(3)$.

β.
- Αν $x<0$, τότε $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$, που είναι δεκτή.
- Αν $x\geq 0$, τότε $f(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή.

Άρα $x=-2$ ή $x=1$.

245 Θέμα 2 – 1283

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}8-x\ , & \text{αν } x<0\\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$.

Λύση

α. Είναι:
- $f(-5)=8+5=13$
- $f(4)=2\cdot 4+5=13$

Άρα $f(-5)=f(4)$.

β. • Αν $x<0$, τότε $f(x)=9 \Leftrightarrow 8-x=9 \Leftrightarrow x=-1$, που είναι δεκτή.
• Αν $x\geq 0$, τότε $f(x)=9 \Leftrightarrow 2x+5=9 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$, που είναι δεκτή.

Άρα $x=-1$ ή $x=2$.

246 Θέμα 2 – 1372 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

247 Θέμα 2 – 13026

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2\ , & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 2x\ , & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\frac{1}{2})$.

β. Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2=4x-1$.

Λύση

α. $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$, $f(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

β. Αν *x* ρητός, τότε $f(x)=2x$,0 οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:
$(2x)^2=4x-1$, δηλαδή $4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0$.

Έτσι, $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

248 Θέμα 2 – 1385

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 .

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

Λύση

α. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα: $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$ και ρίζες τις:

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm1}{2}$, οπότε $x_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $x_2=\dfrac{4}{2}=2$.

Οπότε $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

β. i. Πρέπει $x^2-5x+6\neq0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow (x-2\neq0$ και $x-3\neq0) \Leftrightarrow (x\neq2$ και $x\neq3)$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ii. Για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$

249 Θέμα 2 – 1354

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Λύση

α. Πρέπει $x^2-1\neq 0$. Είναι $x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.
Οπότε πρέπει $x\neq 1$ και $x\neq -1$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

β. Το τριώνυμο $2x^2-5x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$ και

ρίζες τις: $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\dfrac{5\pm 1}{4}$, οπότε $x_1=1$, $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)(x-\dfrac{3}{2})=(x-1)(2x-3)$.

γ. Για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

250 Θέμα 2 – 1295

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

β. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

Λύση

α. Πρέπει $x-4\neq 0\Leftrightarrow x\neq 4$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{4\}$.

Για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}=\dfrac{x(x^2-16)}{x-4}=\dfrac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x^2+4x$

β. Για $x\in A$, έχουμε $f(x)=32\Leftrightarrow x^2+4x=32\Leftrightarrow x^2+4x-32=0$.
Είναι:
- $\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144$
- $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\dfrac{-4\pm 12}{2}$

Οπότε $x=\dfrac{-16}{2}=-8$ ή $x=\dfrac{8}{2}=4$, που απορρίπτεται, αφού $4\notin A$. Άρα $x=-8$.

251 Θέμα 2 – 1297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

Λύση

α. Είναι:

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$
- $f(1)=1+\frac{1}{1}=1+1=2$
- $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

Οπότε $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)=\frac{5}{2}+2-\frac{5}{2}=2$.

β. Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$.

Είναι $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9>0$ και $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}$. Άρα $x=2$ ή $x=\frac{1}{2}$.

252 Θέμα 2 – 1263

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$.

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

Λύση

α. Η απόσταση του αυτοκινήτου μετά από $x=25$ λεπτά , είναι $y=35+0,8\cdot 25=35+20=55$ χιλιόμετρα.

β. Όταν η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α είναι $y=75$, έχουμε

$$35+0,8x=75\Leftrightarrow 0,8x=40\Leftrightarrow 8x=400\Leftrightarrow x=50\,\text{λεπτά}$$

253 Θέμα 2 – 1278

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου (^{o}C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T=15+25\cdot x\ ,\ \text{όταν}\ 0\leq x\leq 200$$

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290\,^{o}C$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440\,^{o}C$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Σε βάθος $x=30$ χιλιομέτρων η θερμοκρασία είναι $T=15+25\cdot 30=15+750=765\ ^{o}C$.

β. Η θερμοκρασία είναι $T=290$, όταν $15+25x=290\Leftrightarrow 25x=275\Leftrightarrow x=11$ km .

γ. Είναι $T>440\Leftrightarrow 15+25\cdot x>440\Leftrightarrow 25x>415\Leftrightarrow x>17$ km .

254 Θέμα 4 – 13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$.

γ. Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$.

δ. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο σύνολο A.

Λύση

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$x^3-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq \pm 1$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$A=\mathbb{R}-\{-1\,,0\,,1\}=(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,0)\cup(0\,,1)\cup(1\,,+\infty)$

β. Επειδή το $0\notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x\in A$.

Είναι

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^7-x=0 \Leftrightarrow x(x^6-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^6-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^6=1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm 1$

Επειδή $0\notin A$, $-1\notin A$, $1\notin A$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

γ. Είναι $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}=\dfrac{x(x^6-1)}{x(x^2-1)}=\dfrac{(x^2)^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2-1}=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$.

δ. Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow x^4+x^2+1=3 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$, $\omega=-2$.

- Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A.
- Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A.

255 Θέμα 4 – 1437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$.

γ. Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$.

Λύση

α. Πρέπει $|x|-3=0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq -3$ και $x\neq 3$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

β. Θέτουμε $|x|=y$, οπότε $x^2-5|x|+6=|x|^2-5|x|+6=y^2-5y+6$

Είναι:
- $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$
- $y_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 1}{2}$. Οπότε $y_1=\dfrac{6}{2}=3$ και $y_2=\dfrac{4}{2}=2$.

Επομένως $x^2-5|x|+6=y^2-5y+6=(y-2)(y-3)=(|x|-3)(|x|-2)$.

Για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\dfrac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3}=\dfrac{(|x|-2)(|x|-3)}{|x|-3}=|x|-2$.

γ. Για $x\in A$, έχουμε: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow (|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0$

$\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0$.

Θέτουμε $|x|=\omega$, (2) και έχουμε: $\omega^2-4\omega+3=0$

Είναι:
- $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$
- $\omega_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm2}{2}$

Οπότε $\omega=\dfrac{6}{2}=3$ ή $\omega=\dfrac{2}{2}=1$

- Αν $\omega=3\Leftrightarrow|x|=3\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=3$ που απορρίπτονται
- Αν $\omega=1\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Άρα $x=-3$ ή $x=-1$ ή $x=1$.

256 Θέμα 4 – 13114

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α. Να δείξτε ότι $f(x)=d(x\,,2)-d(x\,,1)$.

β. Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2 , να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση

α. Είναι

$$f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}=\frac{|x-1|-3|1-x|+2|x-2|}{2}=$$

$$=\frac{|x-1|-3|x-1|+2|x-2|}{2}=\frac{2|x-2|-2|x-1|}{2}=$$

$$=\frac{2\left(|x-2|-|x-1|\right)}{2}=|x-2|-|x-1|=d(x\,,2)-d(x\,,1)$$

β. Η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow d(x\,,2)-d(x\,,1)=0\Leftrightarrow d(x\,,2)=d(x\,,1)$.

Αν Μ το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Άρα $x=\dfrac{3}{2}$.

γ. Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow|x-2|=|x-1|=0\Leftrightarrow x-2=x-1$ ή $x-2=-x+1\Leftrightarrow 0x=1$ ή $x=\dfrac{3}{2}$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x=\dfrac{3}{2}$.

257 Θέμα 4 – 1441

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$, με $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

β. Για $\alpha=1$,

i. να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$

ii. να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

Λύση

α. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Έχουμε $f(2)=g(2)\Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5 \Leftrightarrow 4-8+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow \alpha-4=2\alpha-5\Leftrightarrow -\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=1$.

β. i. Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+1=1\cdot x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

Είναι:
- $\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$
- $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{5\pm 1}{2}$. Οπότε $x=2$ ή $x=3$.

ii. Είναι $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

Έχουμε $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$
$\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

258 Θέμα 4 – 1457

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Λύση

α. Είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες όταν $\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow 2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$.

γ. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $x^2-x+\lambda-\lambda^2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Δηλαδή $\alpha=1>0$, που ισχύει και

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2\leq 0\Leftrightarrow(1-2\lambda)^2=0\Leftrightarrow 1-2\lambda=0\Leftrightarrow -2\lambda=-1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}\ \text{(αφού είναι } \Delta\leq 0\text{)}.$$

Άρα $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

259 Θέμα 4 – 1388

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$:

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii. Να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $-1<\alpha<2$.

Λύση

α. Επειδή η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το
$A=\mathbb{R}-\{-2,1\}$, οι αριθμοί -2 και 1 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+\kappa x+\lambda=0$.

$1^{ος}$ τρόπος

Από τους τρόπους του Vieta έχουμε:

- $S=-\kappa \Leftrightarrow -2+1=-\kappa \Leftrightarrow \kappa=1$
- $P=\lambda \Leftrightarrow -2\cdot 1=\lambda \Leftrightarrow \lambda=-2$.

$2^{ος}$ τρόπος

Πρέπει: • $(-2)^2+\kappa(-2)+\lambda=0 \Leftrightarrow 4-2\kappa+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=2\kappa-4 \quad (1)$

• $1^2+\kappa\cdot 1+\lambda=0 \Leftrightarrow 1+\kappa+\lambda=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1+\kappa+2\kappa-4=0 \Leftrightarrow 3\kappa=3 \Leftrightarrow \kappa=1$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow \lambda=2\cdot 1-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$

Άρα $\kappa=1$ και $\lambda=-2$.

β. i. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ έχουμε:

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)=x^2-x-2 \ , \quad x\in A \ .$$

ii. Είναι $g(\alpha+3)-g(\alpha)=(\alpha+3)^2-(\alpha+3)-2-(\alpha^2-\alpha-2)=\alpha^2+6\alpha+9-\alpha-3-2-\alpha^2+\alpha+2=$
$=6\alpha+6=6(\alpha+1)>0$, αφού $\alpha>-1$. Άρα $g(\alpha+3)>g(\alpha)$.

260 Θέμα 4 – 1390 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

261 Θέμα 1526

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- **$|1-3\alpha|<2$**
- **Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1**

α. Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3}<\alpha<1$.

β. Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Λύση

α. Είναι $|1-3\alpha|<2 \Leftrightarrow |3\alpha-1|<2 \Leftrightarrow -2<3\alpha-1<2 \Leftrightarrow -1<3\alpha<3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<1$

β. Είναι $d(\beta,2)<1 \Leftrightarrow |\beta-2|<1$.

$1^{ος}$ τρόπος

Ισχύει $|\beta-3\alpha-1|=|(\beta-2)+(1-3\alpha)|\le|\beta-2|+|1-3\alpha|<2+1=3$

$2^{ος}$ τρόπος

Έχουμε: $|\beta-2|<1 \Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow 1<\beta<3$

- $-\frac{1}{3}<\alpha<1 \Leftrightarrow 1>-3\alpha>-3 \Leftrightarrow -3<-3\alpha<1$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε:
$1-3<\beta-3\alpha<3+1 \Leftrightarrow -2<\beta-3\alpha<4 \Leftrightarrow -2-1<\beta-3\alpha-1<4-1 \Leftrightarrow -3<\beta-3\alpha-1<3 \Leftrightarrow |\beta-3\alpha-1|<3$

γ. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο $4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2$, έχει $\alpha=4>0$ και
$\Delta=[-4(\beta-2)]^2-4\cdot 4\cdot\beta^2=16(\beta^2-4\beta+4)-16\beta^2=16\beta^2-64\beta+64+16\beta^2=$
$=64\cdot(1-\beta)<0$, αφού $1<\beta<3 \Rightarrow 1-\beta<0$

262 Θέμα 4 – 1400

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α. Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

β. Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ. Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

δ. Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $K(0)=12,5\cdot 0+120=120$.

Άρα, αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα 120 € .

β. Οι αριθμοί 12,5 και 15,5 εκφράζουν αντίστοιχα τις τιμές κόστους και πώλησης για κάθε μπλουζάκι.

γ. Είναι $K(x)=E(x)\Leftrightarrow 12,5\cdot x+120=15,5x\Leftrightarrow 12,5x-15,5x=-120\Leftrightarrow -3x=-120\Leftrightarrow x=40$.

Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια.

δ. Είναι:
- $K(60)=12,5\cdot 60+120=870$ €
- $E(60)=15,5\cdot 60=930$ €

Επειδή $E(60)>K(60)$ έχουν κέρδος.

263 Θέμα 4 – 12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t)=150+50t\ ,\ t\in[0\ ,5]$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t)=650-25t$$

α. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

β. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του;

γ. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ. i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

Λύση

α. Την χρονική στιγμή $t=0$ το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο το οποίο είναι $Y_1(0)=150$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β. Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5)=150+50\cdot 5=400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t\in[5,10]$.

γ. Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το 10^o λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα [10, 20].

Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστέφει στο ελικοδρόμιο. Είναι:

- $Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2$ λεπτά
- $Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16$ λεπτά

δ. i. Είναι $Y_1(t+1) - Y_1(t) = [150 + 50(t+1)] - (150 + 50t) = 50$ μέτρα, οπότε όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, κάθε λεπτό μέχρι το 5^o λεπτό της κίνησής του, το ύψος του αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα.

ii. Είναι $Y_2(t+1) - Y_2(t) = [650 - 25(t+1)] - (650 - 25t) = -25$ μέτρα, οπότε όταν επιστρέφει το ελικόπτερο, κάθε λεπτό από το 10^o μέχρι το 20^o λεπτό της κίνησής του, το ύψος του μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα.

264 Θέμα 4 – 1418

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm .

α. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B .

β. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B , να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Λύση

α. Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι:
- τύπου A είναι $E_A = d^2 cm^2$ και
- τύπου B είναι $E_B = (d+1)^2 cm^2$.

β. i. Το εμβαδόν της επιφάνειας είναι $E = 200E_A$ ή $E = 128E_B$

Οπότε $200E_A = 128E_B \Leftrightarrow 25E_A = 16E_B \Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2$

$25d^2 = 16(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-32)^2 - 4\cdot 9\cdot(-16) = 1024 + 576 = 1600$ και

ρίζες τις $d_{1,2} = \dfrac{32 \pm \sqrt{1600}}{2\cdot 9} = \dfrac{32 \pm 40}{18}$.

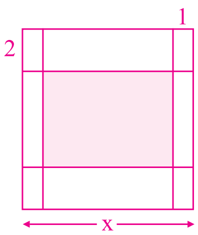
Οπότε $d = \dfrac{72}{18} = 4$ ή $d = \dfrac{-8}{18} = -\dfrac{4}{9} < 0$, που απορρίπτεται.

Άρα $d = 4$.

ii. Το εμβαδόν E που καλύπτουν τα πλακάκια είναι $E = 200d^2 = 200\cdot 4^2 = 3200cm^2$.

265 Θέμα 4 – 1420

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \le x \le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$\mathbf{E(x) = (x-2)(x-4)}$$

β. Να βρεθεί η τιμή του x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

γ. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

Λύση

α. Οι διαστάσεις του σκιασμένου ορθογωνίου είναι $x-2$ και $x-4$, οπότε το εμβαδόν της περιοχής εκτύπωσης είναι $E(x)=(x-2)(x-4)$ (1).

β. Είναι $E(x)=35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=35 \Leftrightarrow x^2-4x-2x+8-35=0 \Leftrightarrow x^2-6x-27=0 \Leftrightarrow x=9$

Έχουμε:

- $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 12}{2}$. Οπότε $x=\dfrac{18}{2}=9$ ή $x=\dfrac{-6}{2}=-3$, που απορρίπτεται.

Άρα $x=9$.

γ. Είναι $x^2-6x+8\geq 24 \Leftrightarrow x^2-6x-16\geq 0$, (1).

Το τριώνυμο $x^2-6x-16$ έχει

- $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=36+64=100>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 10}{2}$, οπότε $x=\dfrac{16}{2}=8$ ή $x=\dfrac{-4}{2}=-2$

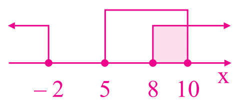
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[8,+\infty)$.

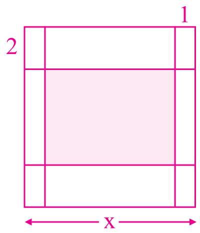
Επιπλέον έχουμε $5\leq x\leq 10$.

Άρα $x\in[8,10]$.



266 Θέμα 4 – 1421

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5\leq x\leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$\mathbf{E(x)=x^2-6x+8}$$

β. Να βρεθεί η τιμή του x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\ cm^2$.

γ. Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\ cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

Λύση

α. Οι διαστάσεις του ορθογώνιου εκτύπωσης είναι $x-2$ και $x-4$.

Οπότε η περιοχή εκτύπωσης έχει εμβαδόν $E=(x-2)(x-4)=x^2-4x-2x+8=x^2-6x+8$.

β. Είναι $E = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$

Είναι:
- $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$
- $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 10}{2}$. Οπότε $x = 8$ ή $x = -2$, που απορρίπτεται.

Άρα $x = 8$ cm .

γ. Είναι $E \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \le 0$, (1) .

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει:

- $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144$
- $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 12}{2}$. Οπότε $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ και $x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$.

x	$-\infty$		-3		9		$+\infty$
$x^2 - 6x - 27$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η (1) $\Leftrightarrow -3 \le x \le 9$.

Έχουμε επιπλέον $5 \le x \le 10$, οπότε $5 \le x \le 9$.

267 Θέμα 4 – 1422

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32 .

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273 .

α. Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^oK) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1{,}8} + 273$$

γ. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ^oK μέχρι 283 ^oK . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^oF.

Λύση

α. Είναι $F = 1{,}8C + 32$ και $K = C + 273$.

β. Έχουμε $F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow -1{,}8C = 32 - F \Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32 \Leftrightarrow C = \dfrac{F - 32}{1{,}8}$.

Άρα $K = \dfrac{F - 32}{1{,}8} + 273$.

γ. Έχουμε

$$278 \le K \le 283 \Leftrightarrow 278 \le \frac{F - 32}{1{,}8} + 273 \le 283 \Leftrightarrow 278 - 273 \le \frac{F - 32}{1{,}8} \le 283 - 273$$

$$\Leftrightarrow 5 \le \frac{F - 32}{1{,}8} \le 10 \Leftrightarrow 9 \le F - 32 \le 18 \Leftrightarrow 41 \le F \le 50 .$$

268 Θέμα 4 – 1467

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 12+0,5x, & \text{αν } 0\le x\le 30 \\ 0,7x+6\ , & \text{αν } x>30 \end{cases}$$

α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i. έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β. Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0,6x\ ,\ \text{για}\ \ x\ge 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Λύση

α. Το ποσό που θα πληρώσει κάποιος αν καταναλώσει

i. $x = 0$ κυβικά νερού είναι $f(0)=12$ €

ii. $x = 10$ κυβικά νερού είναι $f(10)=12+0,5\cdot 10=17$ €.

iii. $x = 50$ κυβικά νερού είναι $f(50)=0,7\cdot 50+6=41$ €

β. Αν οι κάτοικοι κατανάλωσαν x κυβικά νερού ο καθένας, τότε έχουμε $f(x)>g(x)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x\in[0,\ 30]$, τότε $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 12+0,5x>12+0,6x \Leftrightarrow 0,5x>0,6x \Leftrightarrow -0,1x>0 \Leftrightarrow 0,1x<0$
  $\Leftrightarrow x<0$, άτοπο.
- Αν $x>30$, τότε $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 0,7x+6>12+0,6x \Leftrightarrow 0,1x>6 \Leftrightarrow x>60$.

Άρα καθένας από τους κατοίκους των πόλεων Α και Β κατανάλωσε περισσότερα από $60m^3$ νερού.

269 Θέμα 4 – 1484

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- **Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.**
- **Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο Ο.**
- **Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM>600$ μέτρα.**
- **Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA=600$ μέτρα.**

Υποθέτουμε ότι, για $t\ge 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

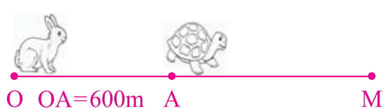
α. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β. Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ=2250 μέτρα. Να βρείτε:

i. Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii. Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii. Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.



Λύση

α. Για να κερδίσει η χελώνα, θα πρέπει $S_X(t) > S_Λ(t) \Leftrightarrow 600+40t > 10t^2 \Leftrightarrow -10t^2+40t+600>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2-4t-60<0 \ , \ (1)$$

Το τριώνυμο $t^2-4t-60$ έχει:

- $Δ=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-60)=16+240=256>0$
- $t_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{256}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 16}{2}$, οπότε $t=\dfrac{20}{2}=10$ ή $t=\dfrac{-12}{6}=-6$

t	$-\infty$		-6		10		$+\infty$
$t^2-4t-60$		+	0	−	0	+	

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Οπότε η (1) έχουμε $\Leftrightarrow t\in(-6,10)$.

Επειδή επιπλέον $t\geq 0$, έχουμε $0\leq t<10 \Leftrightarrow 0\leq 40t<400 \Leftrightarrow 600+0\leq 600+40t<600+400$

$$\Leftrightarrow 600\leq S_Λ(t)<1000$$

Άρα, το τέρμα Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο.

β. i. Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$S_x(t)=S_Λ(t) \Leftrightarrow 600+40t=10t^2 \Leftrightarrow 10t^2-40t-600=0 \Leftrightarrow t^2-4t-60=0 \overset{(α)}{\Leftrightarrow} t=10$ min

ii. Είναι $S_Λ(12)=10\cdot 12^2=10\cdot 144=1440$ μέτρα

$S_x(12)=600+40\cdot 12=600+480=1080$ μέτρα

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας. Η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$S=S_Λ(12)-S_X(12)=1440-1080=360$ m.

iii. Είναι $S_Λ(t)=2250 \Leftrightarrow 10t^2=2250 \Leftrightarrow t^2=225 \Leftrightarrow t^2=15^2 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t=15$ min .

270 Θέμα 4 – 1495

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^o$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x , y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x) \ , \ x\in(0,10)$$

β. Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\dfrac{25}{2}$, για κάθε $x\in(0,10)$.

γ. Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\dfrac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ;

Λύση

α. Έχουμε $x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$. Είναι $x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow 10-x>0 \Leftrightarrow x<10$, άρα $x\in(0,10)$.

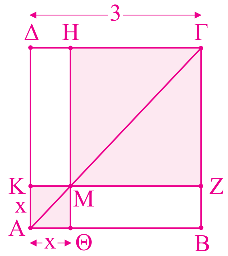
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x)=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}x(10-x)=\dfrac{1}{2}(10x-x^2)=\dfrac{1}{2}(-x^2+10x)$, $x\in(0,10)$.

β. Είναι $E(x)\leq\dfrac{25}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(-x^2+10x)\leq\dfrac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2+10x\leq 25 \Leftrightarrow x^2-10x+25\geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2\geq 0$, που ισχύει.

γ. Είναι $E(x)\leq\dfrac{25}{2} \overset{(β)}{\Leftrightarrow} (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$, οπότε $y=10-5=5$.

Άρα το $E(x)$ γίνεται μέγιστο, όταν $x=y=5$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

271 Θέμα 4 – 1497



Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς $ΑΒ = 3$ και το $Μ$ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω $Ε$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α. Να αποδείξετε ότι $Ε = 2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0, 3)$.

β. Να αποδείξετε ότι $Ε \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

γ. Για ποια θέση του $Μ$ πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Πρέπει $x > 0$ και $(ΜΖ) > 0 \Leftrightarrow 3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$. Άρα $0 < x < 3$.

Είναι $Ε = (ΑΘΜΚ) + (ΜΖΓΗ) = x^2 + (3 - x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9, \quad x \in (0, 3)$.

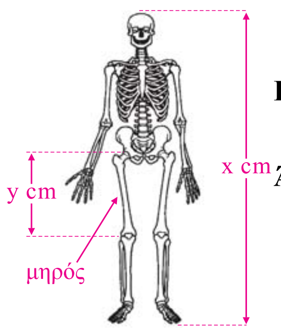
β. Είναι $Ε \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0$, που ισχύει.

γ. Είναι $Ε = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Για $x = \frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του ΑΒ, οπότε το $Μ$ είναι το μέσο του $ΑΓ$.

272 Θέμα 4 – 1501

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5$ cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8$ cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

Λύση

α. Είναι $y = 38,5$, οπότε $38,5 = 0,43x - 26 \Leftrightarrow 0,43x = 38,5 + 26 \Leftrightarrow 0,43x = 64,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 43x = 6450 \Leftrightarrow x = \frac{6450}{43} \Leftrightarrow x = 150\,\text{cm}$.

β. Για $y = 42,8$ και $x = 164$ η σχέση $y = 0,45x - 31$ γίνεται

$42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 73,8 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8$, που ισχύει.

Άρα το μηραίο οστό και τα οστά του χεριού προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ. Αν ένας άνδρας και μία γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ιδίου μήκους, τότε:
$0,43x-26=0,45x-31 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -0,02x-=-5 \Leftrightarrow 2x=500 \Leftrightarrow x=250\text{cm}$.

Άρα, δεν μπορεί να συμβεί διότι έχει υπάρξει άντρας με ύψος 2,72 m, αλλά δεν έχει καταγραφεί γυναίκα με ύψος μεγαλύτερο από 2,48 m.

273 Θέμα 4 – 1410

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y=60t-5t^2$$

α. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β. Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175$ m.

γ. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Λύση

α. Η σφαίρα βρίσκεται στο έδαφος, όταν $y=0$.

Για $y=0$, έχουμε $0=60t-5t^2 \Leftrightarrow 5t^2-60t=0 \Leftrightarrow 5t(t-12)=0 \Leftrightarrow t=0$ ή $t=12$.

Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από 12 sec.

β. Για $y=175$, έχουμε $175=60t-5t^2 \Leftrightarrow 5t^2-60t+175=0 \Leftrightarrow t^2-12t+35=0$.

Η εξίσωση έχει:
- $\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot35=144-140=4$
- $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{12\pm2}{2}$. Οπότε $t=5$ ή $t=7$.

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y=175\text{m}$ τις χρονικές στιγμές $t_1=5\text{sec}$ και $t_2=7$ sec.

γ. Είναι $y>100 \Leftrightarrow 60t-5t^2>100 \Leftrightarrow 5t^2-60t+100<0 \Leftrightarrow t^2-12t+20<0$, (1).

Είναι:
- $\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot20=144-80=64$
- $t_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\dfrac{12\pm8}{2}$. Οπότε $t=10$ ή $t=2$.

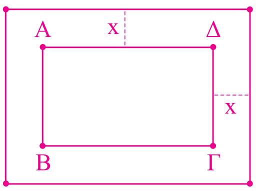
t	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$t^2-12t+20$		+	0	−	0	+	

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $(1) \Leftrightarrow t\in(2,10)$.

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m στο χρονικό διάστημα μεταξύ των 2 sec και 10 sec.

274 Θέμα 4 – 12911

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x>0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x$, $x>0$

β. Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E=500\,\text{m}^2$.

γ. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m²;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15+2x$ και $25+2x$. Το εμβαδόν της ζώνης είναι:
$E(x)=(15+2x)\cdot(25+2x)-E_{ΑΒΓΔ}=15\cdot25+30x+50x+4x^2-15\cdot25=4x^2+80x\ ,\ x>0$

β. Είναι $E(x)=500 \Leftrightarrow 4x^2+80x=500 \Leftrightarrow x^2+20x-125=0$

Είναι:
- $\Delta=20^2-4\cdot1\cdot(-125)=400+500=900>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-20\pm\sqrt{900}}{2\cdot1}=\dfrac{-20\pm30}{2}$, οπότε $x=\dfrac{10}{2}=5$ ή $x=\dfrac{-50}{2}=-25$.

Επειδή $x>0$, είναι $x=5$ m .

γ. $E(x)<500 \Leftrightarrow 4x^2+80x<500 \Leftrightarrow 4x^2+80x-500<0 \Leftrightarrow x^2+20x-125<0$, (1)

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.
Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x\in(0,5)$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$x^2+20x-125$		$+$	0	$-$	0	$+$	

275 Θέμα 4 – 1506

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40$ cm . Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $0<x<20$

β. να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2$$

γ. να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x)\le100$, για κάθε $x\in(0,20)$

δ. να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm .

Λύση

α. Αν x και y οι διαστάσεις του ορθογώνιου, τότε $\Pi=2x+2y \Leftrightarrow 40=2x+2y \Leftrightarrow x+y=20 \Leftrightarrow y=20-x$
Επειδή $y>0$ έχουμε $20-x>0 \Leftrightarrow x<20$. Άρα $0<x<20$.

β. Είναι $E(x)=x\cdot y=x(20-x)=20x-x^2$.

γ. Είναι $E(x)\le100 \Leftrightarrow 20x-x^2\le100 \Leftrightarrow x^2-20x+100\ge0 \Leftrightarrow (x-10)^2\ge0$, που ισχύει.

δ. Επειδή $E(x)\le100$ και το ίσον ισχύει για $x=10$, η μέγιστη τιμή του $E(x)$ είναι 100 .

Για $x=10$, είναι $y=20-10=10$.

Άρα από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

276 Θέμα 4 – 1510

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

β. Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

γ. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Λύση

α. Το μηνιαίο κόστος, αν γεμίζει ν τόνερ είναι $K(\nu)=15\nu+6500$.

β. Τα μηνιαία έσοδα από την πώληση ν τόνερ είναι $E(\nu)=25\nu$

γ. i. Έστω $P(\nu)$ το κέρδος της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ. Είναι

$$P(\nu)=E(\nu)-K(\nu)=25\nu-15\nu-6500=10\nu-6500$$

Πρέπει $P(\nu)\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 0 \Leftrightarrow 10\nu\geq 6500 \Leftrightarrow \nu\geq 650$.

ii. Πρέπει $P(\nu)\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu-6500\geq 500 \Leftrightarrow 10\nu\geq 7000 \Leftrightarrow \nu\geq 700$.

25. Γραφική παράσταση συνάρτησης

277 Θέμα 2 – 1358

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

Λύση

α. Είναι:
- $f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-15=1-2-15=-16$
- $f(0)=0^2+2\cdot 0-15=0+0-15=-15$
- $f(1)=1^2+2\cdot 1-15=1+2-15=-12$

Οπότε $f(-1)+f(0)+f(1)=-16-15-12=-43$.

β. Είναι $f(0)=-15$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-15)$. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0$.

Είναι:
- $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 8}{2}$, οπότε $x=\dfrac{6}{2}=3$ ή $x=\dfrac{-10}{2}=-5$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(3,0)$ και $\Gamma(-5,0)$.

278 Θέμα 2 – 12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

β. Είναι: $f(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=4$, άρα το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$.

279 Θέμα 2 – 1345

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y .

Λύση

α. Πρέπει $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{3\}$.

β. Για κάθε $x\neq 3$, έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=x-2$.

γ. Είναι:
- $f(0)=-2$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο $A(0,-2)$ και τον x΄x στο $B(2,0)$.

280 Θέμα 2 – 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}+\sqrt{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β. Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$.

γ. Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y΄y άξονα;

Λύση

α. Η συνάρτηση ορίζεται, όταν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, γιατί $x^2+2\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g=[1,+\infty]$.

β.
- Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1)=\dfrac{1}{1+2}+\sqrt{1-1}=\dfrac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x=-2$, διότι $-2\notin A_g$.

- Για $x=2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2)=\dfrac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\dfrac{2}{6}+\sqrt{1}=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον y′y άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

281 Θέμα 2 – 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Λύση

α. Πρέπει $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

β. Έχουμε: $f(4)=\dfrac{3}{\sqrt{4}-1}=3$, άρα το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ. Το $x=-1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Άρα το σημείο N δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

282 Θέμα 2 – 1259

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση

α. Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{1,-1\}$.

β. Αρκεί $f(\alpha)=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2-1}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2-1=8 \Leftrightarrow \alpha^2=9 \Leftrightarrow \alpha^2=3^2 \Leftrightarrow \alpha=3$ ή $\alpha=-3$.

283 Θέμα 2 – 1307 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

284 Θέμα 2 – 1241

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α , β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α , β .

β. Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α. Είναι $\begin{cases} f(1)=6 \\ f(-1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 1+\beta=6 \\ \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ -\alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=6 \\ 2\beta=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+5=6 \\ \beta=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=5 \end{cases}$.

β. Για $\alpha=1$ και $\beta=5$, έχουμε $f(x)=x+5$.

Είναι $f(0)=5$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 5)$ και τον $x'x$ στο $B(-5, 0)$.

285 Θέμα 2 – 1299

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

Λύση

α. Είναι $A=x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+3)$.

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{0\}$ και η g το $B=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\neq 0$, έχουμε

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x}=x^2-x+3 \Leftrightarrow 3=x^3-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{\alpha.}{\Leftrightarrow}(x-1)(x^2+3)=0 \overset{x^2+3\neq 0}{\Leftrightarrow} x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Είναι $f(1)=\dfrac{3}{1}=3$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $M(1, 3)$.

286 Θέμα 2 – 1301

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β. Αν A , O , B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0, 0)$, να αποδείξτε ότι A , B είναι συμμετρικά ως προς το O .

Λύση

α. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.
Είναι $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f(-1)=-1$.
Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ και $B(-1, -1)$.

β. Επειδή τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-1, -1)$, έχουν αντίθετες ομώνυμες συντεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς το O .

287 Θέμα 4 – 1393

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i. αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

Λύση

α. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.
Είναι $g(-1)=-1+1=0$.
Οπότε το $A(-1, 0)$.

β. Είναι $f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2+3x+2=x+\alpha\Leftrightarrow x^2+2x+2-\alpha=0$, (2) .
Η (2) έχει $\Delta=2^2-4\cdot1(2-\alpha)=4-8+4\alpha=4\alpha-4=4(\alpha-1)$.

- Αν $\alpha>1$, τότε $\Delta>0$, άρα η (2) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha<1$, τότε $\Delta<0$, άρα η (2) δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

288 Θέμα 4 – 12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

β. Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ. Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Λύση

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $3-|x|\neq 0$.

Είναι

$$3-|x|=0\Leftrightarrow -|x|=-3\Leftrightarrow |x|=3\Leftrightarrow x=\pm3$$

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x\in(-\infty, -3)\cup(-3, 3)\cup(3, +\infty)$.

β. Για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|} = \frac{3^2-|x|^2}{3-|x|} = \frac{(3+|x|)(3-|x|)}{3-|x|} = 3+|x|$$

γ. • Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 3+|x|=0 \Leftrightarrow |x|=-3$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα η γραφική παράσταση C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

• Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ πρέπει να βρούμε το $f(0)$.

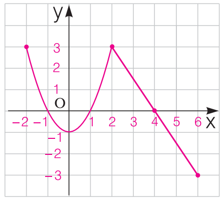
Ισχύει $f(0)=3+|0|=3$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0, 3)$.

δ. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

Η εξίσωση $g(x)=f(x) \Leftrightarrow -x^2+3=3+|x| \Leftrightarrow -|x|^2+3-3-|x|=0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|=0$.

Επειδή $|x|^2 \geq 0$ και $|x| \geq 0$, ισχύει $|x|^2+|x|=0 \Leftrightarrow x=0$.
Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το $(0, 3)$.

289 Θέμα 2 – 1304



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	**– 2**	**– 1**		**1**	**2**	
y			**– 1**			**– 3**

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού A της f είναι το σύνολο με στοιχεία τις τετμημένες των σημείων της C_f.
Άρα $A=[-2, 6]$.

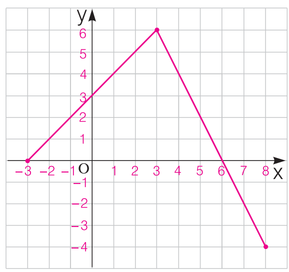
β.

x	– 2	– 1	0	1	2	6
y	3	0	– 1	0	3	– 3

γ. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,-1)$, ενώ τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $B(-1, 0)$, $\Gamma(1, 0)$ και $\Delta(4, 0)$.

δ. Τα διαστήματα στα οποία η f παίρνει αρνητικές τιμές είναι εκείνα που η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Δηλαδή $x \in (-1, 1) \cup (4, 6]$.

290 Θέμα 2 – 1305



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

x	– 3	– 1	0	3		
y					– 2	– 4

δ. Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού A της f είναι το σύνολο με στοιχεία τις τετμημένες των σημείων της C_f.
Άρα $A=[-3, 8]$.

β.

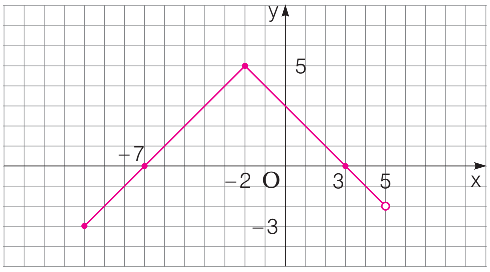
x	−3	−1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	−2	−4

γ. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 3)$ και τον $x'x$ στα σημεία $B(-3, 0)$, $\Gamma(6, 0)$.

δ. Η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές όταν η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, οπότε $x \in (-3, 6)$.

291 Θέμα 2 – 12910

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

β. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

γ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$.

δ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

Λύση

Είναι:

α. $A=[-10, 5)$ και $f(A)=[-3, 5]$.

β. $f(-2)=5$, $f(0)=3$, $f(3)=0$

γ. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-7$ ή $x=3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$).

δ. $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον $x'x$).

292 Θέμα 4 – 13027

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\beta$, $g(x)=x+\beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3, -\frac{\beta}{2}\right)$.

α. Να αποδείξτε ότι $\beta=-1$.

β. Για $\beta=-1$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)-2\kappa g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α. Οι συντεταγμένες του σημείου M θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y=g(x)$, άρα θα ισχύει $g(\frac{3\beta}{2})=-3-\frac{\beta}{2}$, οπότε $\frac{3\beta}{2}+\beta=-3-\frac{\beta}{2}$ άρα $\frac{3\beta}{2}+\frac{\beta}{2}+\beta=-3$.

Ώστε $3\beta=-3$, έτσι $\beta=-1$.

β. Για $\beta=-1$

i. Είναι $f(x)=x^2-1$.

Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y=f(x)=0$, άρα $x^2-1=0$ οπότε $x^2=1$.

Τελικά $x=1$, $x=-1$.

Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1,0)$ και $B(-1,0)$. Επίσης $f(0)=0^2-1=-1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0,-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii. Θέλουμε να ισχύει

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-1<x-1\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1$$

iii. Θέλουμε να ισχύει $f(x)-2kg(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση $x^2-1-2k(x-1)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα

$x^2-2kx+(2k-1)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=1>0$, για να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η ανισότητα, πρέπει και αρκεί να ισχύει $\Delta\leq 0$ δηλαδή $(-2k)^2-4\cdot 1\cdot(2k-1)\leq 0$ άρα πρέπει και αρκεί $4k^2-8k+4\leq 0$ ή ισοδύναμα αν διαιρέσουμε κάθε όρο με το 4, πρέπει $k^2-2k+1\leq 0$ δηλαδή $(k-1)^2\leq 0$ σχέση η οποία αληθεύει μόνο για $k=1$.

293 Θέμα 4 – 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$.

Να βρείτε:

α. τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

γ. τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

Λύση

α. Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2-4x-5\geq 0$ με $x\in\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4(-5)=36>0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1=5$ και $x_2=-1$.

Το $\alpha=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2-4x-5\geq 0$ αληθεύει για $x\leq -1$ και $x\geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g=\mathbb{R}$.

β. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$, στο $A_f\cap A_g$ και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$$\sqrt{x^2-4x-5}=|x+3|\Leftrightarrow x^2-4x-5=|x+3|^2\Leftrightarrow x^2-4x-5=x^2+6x+9\Leftrightarrow -10x=14\Leftrightarrow x=\frac{-7}{5}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $\left(\frac{-7}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

γ. Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$$\sqrt{x^2-4x-5} < |x+3| \Leftrightarrow x^2-4x-5 < |x+3|^2 \Leftrightarrow -10x < 14 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{5}$$

Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x \in A_f$ προκύπτει ότι $x \in \left(\frac{-7}{5}, -1\right] \cup [5, +\infty)$.

294 Θέμα 4 – 1454

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{1}{2})$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

Λύση

α. Για να έχει η f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, πρέπει $x^2-x+\frac{\alpha}{4} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$ πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 1-\alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

β. i. Είναι $f(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha=1$

Για $\alpha=1$, είναι $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}=|x-\frac{1}{2}|$.

ii. Είναι $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ή $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$.

295 Θέμα 4 – 1444

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2 , \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

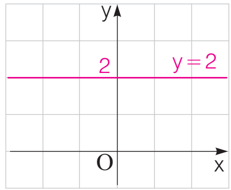
β. Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο B(2, 0) , να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο.

δ. Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x .

Λύση

α. Είναι $f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.



β. Για $\lambda=-1$, έχουμε $f(x)=0x^2-0x+2=2$.
Η γραφική παράσταση της f έχει εξίσωση $y=2$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 2)$.

γ. Έχουμε $f(2)=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)\,2^2-(\lambda+1)\,2+2=0 \Leftrightarrow 4\,(\lambda+1)-2\,(\lambda+1)+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\lambda+4-2\lambda-2+2=0 \Leftrightarrow 2\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$.
Για $\lambda=-2$ είναι $f(x)=(-2+1)\,x^2-(-2+1)\,x+2=-x^2+x+2$.
Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$
Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1-8=9$
- $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 3}{2}$. Οπότε $x=2$ ή $x=-1$.

Άρα η γραφική παράσταση τέμνει τον $x'x$ και στο σημείο $\Gamma(-1, 0)$.

δ. Για $\lambda=1$ είναι $f(x)=2x^2-2x+2$.
Το τριώνυμο έχει $\Delta=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 2=4-16=-12<0$ και $\alpha=1>0$
Οπότε $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

296 Θέμα 4 – 1524

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ. Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

δ. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α. Πρέπει $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{3}{2}$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

β. Είναι $f(x)=\dfrac{4x^2-2\alpha x-6x+3\alpha}{2x-3}=\dfrac{2x(2x-\alpha)-3(2x-\alpha)}{2x-3}=\dfrac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha$, $x\in A$

γ. Είναι $f(1)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 1-\alpha=-1 \Leftrightarrow 2-\alpha=-1 \Leftrightarrow -\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=3$.

δ. Είναι $f(0)=-\alpha$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow 0=2x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha}{2}$. Πρέπει $x\neq\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2}\neq\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha\neq 3$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -\alpha)$ και τον $x'x$ στο $B\left(\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha\neq 3$.

Αν $\alpha=3$, τότε δεν τέμνει τον $x'x$.

297 Θέμα 4 – 1446

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

Λύση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$, (1) δεν έχει καμία πραγματική ρίζα. Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β. Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης: $f(x)<2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$.

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα: $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0$ και ρίζες τις:

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\dfrac{1\pm3}{2}$, οπότε $x=\dfrac{4}{2}=2$ ή $x=\dfrac{-2}{2}=-1$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ. Είναι $|2x-1|<3 \Leftrightarrow -3<2x-1<3 \Leftrightarrow -2<2x<4 \Leftrightarrow -1<x<2$.

Από το ερώτημα **β.** έχουμε ότι το σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

298 Θέμα 4 – 1470

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ. Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

Λύση

α. Για $\alpha=1$, έχουμε $g(x)=x+1$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Για $x=0$, έχουμε $f(0)=1$ και για $x=1$, $f(1)=2$. Οπότε τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

β. Οι C_f, C_g τέμνονται σε δύο σημεία, όταν η εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+1=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$, (1) έχει δύο ρίζες. Δηλαδή $\Delta>0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot1(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow 1-4+4\alpha>0 \Leftrightarrow 4\alpha>3 \Leftrightarrow \alpha>\dfrac{3}{4}$.

γ. Για $\alpha>1>\dfrac{3}{4}$ η (1) έχει δύο ρίζες και οι τετμημένες x_1, x_2 των σημείων τομής των C_f, C_g είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Επειδή $P=x_1x_2=1-\alpha<0$, έχουμε ότι οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

299 Θέμα 4 – 1408

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ. Αν $\lambda\neq2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ, ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

Λύση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ (1) έχει μία τουλάχιστον λύση.

Η (1) $\Leftrightarrow x^2=\lambda x+(1-\lambda) \Leftrightarrow x^2-\lambda x+\lambda-1=0$.

Είναι $\Delta=(-\lambda)^2-4(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\geq0$, για κάθε $\lambda\neq0$.

Οπότε η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση.

β. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο όταν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία μόνο λύση.
Δηλαδή $\Delta=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$.
Για $\lambda=2$ η (1) $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.
Είναι $f(1)=1^2=1$, άρα το κοινό σημείο είναι $A(1,1)$.

γ. Για $\lambda \neq 0,2$, είναι $x_1+x_2=\lambda$, οπότε $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2 \Leftrightarrow \lambda^2=|\lambda|+2 \Leftrightarrow |\lambda|^2-|\lambda|-2=0$, (1).
Θέτουμε $|\lambda|=y$, οπότε η (1) $\Leftrightarrow y^2-y-2=0$.
Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$
- $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 3}{2}$. Οπότε $y=\dfrac{4}{2}=2$ ή $y=\dfrac{-2}{2}=-1$.

- Αν $y=2 \Leftrightarrow |\lambda|=2 \Leftrightarrow \lambda=-2$ ή $\lambda=2$, που απορρίπτεται (αφού $\lambda \neq 2$).
- Αν $y=-1 \Leftrightarrow |\lambda|=-1$, αδύνατη.

Άρα $\lambda=-2$.

300 Θέμα 4 – 1398

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ. Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0,3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

Λύση

α. Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$.
Άρα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(-3,0)$.

β. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. Άρα η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ σε κάποια από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.

γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $x'x$. Είναι $f(0)=2$, $g(0)=-9$, οπότε $f(0)\neq g(0)$. Άρα οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο στον άξονα $y'y$.

δ. Έστω $h(x)=\alpha x+\beta$. Η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-9)$ ή $(0,3)$.
Πρέπει και η C_h να διέρχεται από το σημείο $\Delta(0,3)$, άρα $h(0)=3 \Leftrightarrow \beta=3$, οπότε $h(x)=\alpha x+3$. Η C_h τέμνει τον $x'x$ στο $(3,0)$, οπότε $h(3)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot 3+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$.
Άρα $h(x)=-x+3$.

301 Θέμα 4 – 1433

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1 , τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του α .

ii. Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

Λύση

α. Είναι $f(1)=\alpha\cdot 1-\alpha+2=2$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του α.

β. i. Είναι $f(1)=g(1)\Leftrightarrow 2=1^2-\alpha+3\Leftrightarrow 2=4-\alpha\Leftrightarrow \alpha=2$.

ii. Για $\alpha=2$, είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-2+2=x^2-2+3$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Οπότε οι C_f, C_g τέμνονται μόνο στο σημείο με τετμημένη $x=1$.

Άρα δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής των C_f και C_g.

γ. Οι C_f και C_g έχουν δύο κοινά σημεία, όταν η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0 \text{ έχει δύο λύσεις.}$$

Δηλαδή $\Delta>0\Leftrightarrow \alpha^2-4>0\Leftrightarrow \alpha^2>4\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2}>\sqrt{4}\Leftrightarrow |\alpha|>2\Leftrightarrow \alpha<-2$ ή $\alpha>2$.

302 Θέμα 4 – 1485

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Λύση

α. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι εκείνες για τις οποίες ισχύει $f(x)>0\Leftrightarrow (x-1)^2-4>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-1|^2>2^2\Leftrightarrow |x-1|>2\Leftrightarrow x-1>2$ ή $x-1<-2\Leftrightarrow x>3$ ή $x<-1$.

β. Επειδή $g(x)=|x-1|+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow (x-1)^2-4=|x-1|+2\Leftrightarrow |x-1|^2-|x-1|-6=0$ (1).

Θέτουμε $|x-1|=y$, $y\geq 0$ και η (1) γίνεται $y^2-y-6=0$.

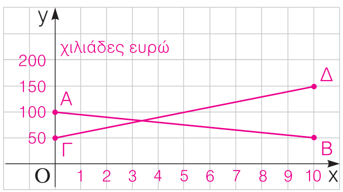
Είναι:
- $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$
- $y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{1\pm 5}{2}$. Οπότε $y=3$ ή $y=-2$ που απορρίπτεται.

Άρα $y=3$, οπότε $|x-1|=3\Leftrightarrow x-1=3$ ή $x-1=-3\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$.

Είναι $f(4)=(4-1)^2-4=5$ και $f(-2)=(-2-1)^2-4=5$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι: $A(4, 5)$ και $B(-2, 5)$.

303 Θέμα 4 – 14477



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $A(0, 100)$ και $B(10, 50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με $\Gamma(0, 50)$ και $\Delta(10, 150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

α. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β. i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α. ερώτημα ήταν σωστές.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

Λύση

α. Είναι $\varepsilon(5) \simeq 100$ χιλιάδες € και $\delta(5) \simeq 75$ χιλιάδες € .

β. i. Είναι:

- $\delta(x) = \alpha x + \beta$ με $\delta(0) = 100 \Leftrightarrow \beta = 100$ και $\delta(10) = 50 \Leftrightarrow \alpha \cdot 10 + 100 = 50 \Leftrightarrow 10\alpha = -50 \Leftrightarrow \alpha = -5$, οπότε $\delta(x) = -5x + 100$.
- $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ με $\varepsilon(0) = 50 \Leftrightarrow \beta = 50$ και $\varepsilon(10) = 150 \Leftrightarrow \alpha \cdot 10 + 50 = 150 \Leftrightarrow 10\alpha = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$, οπότε $\varepsilon(x) = 10x + 50$.

Για $x = 5$ είναι $\varepsilon(5) = 10 \cdot 5 + 50 = 100$ και $\delta(5) = -5 \cdot 5 + 100 = 75$

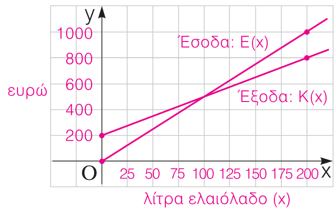
Άρα οι εκτιμήσεις ήταν σωστές

ii. Είναι $\delta(x) = \varepsilon(x) \Leftrightarrow -5x + 100 = 10x + 50 \Leftrightarrow -15x = -50 \Leftrightarrow x = \dfrac{50}{15} \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x \simeq 3{,}33$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(3{,}33,\ 83{,}3)$, που σημαίνει, ότι στο σημείο αυτό το κέρδος της επιχείρησης είναι 0 .

304 Θέμα 4 – 1386

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο διπλανό σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ. Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά

δ. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ. .

Λύση

α. Το εκτιμούμενο σημείο τομής είναι το $(100, 500)$ που σημαίνει ότι, αν πουλήσει 100 λίτρα δεν έχει ζημιά, αλλά ούτε και κέρδος.

β. Τα αρχικά έξοδα της εταιρείας είναι $K(0) = 200$ € .

γ. Πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα , ώστε τα έσοδα και τα έξοδα να είναι ίσα.

δ. • Αν $K(x) = \alpha x + \beta$, $x \ge 0$ έχουμε $K(0) = 200 \Leftrightarrow \beta = 200$ και

$K(200) = 800 \Leftrightarrow \alpha \cdot 200 + 200 = 800 \Leftrightarrow 200\alpha = 600 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Άρα $K(x) = 3x + 200$, $x \ge 0$.

• Αν $E(x) = \alpha x + \beta$, $x \ge 0$ έχουμε $E(0) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και

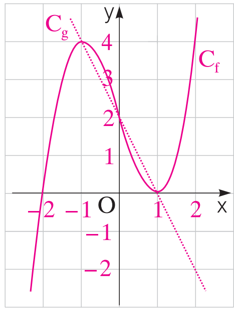
$E(200) = 1000 \Leftrightarrow \alpha \cdot 200 + 0 = 1000 \Leftrightarrow 200\alpha = 1000 \Leftrightarrow \alpha = 5$.

Άρα $E(x) = 5x$, $x \ge 0$.

Είναι $E(x) \ge K(x) \Leftrightarrow 5x \ge 3x + 200 \Leftrightarrow x \ge 100$.

Άρα πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα για μην έχει ζημιά.

305 Θέμα 4 – 1490



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.

Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α. Τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

β. Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ. Τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

δ. Τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Λύση

α. Είναι $f(x)=-2x+2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (1) .

Οι λύσεις τις εξίσωσης (1) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g .

Δηλαδή $x=-1$, $x=0$ και $x=1$.

β. Είναι $f(-1)=4$, $f(0)=2$, $f(1)=0$.

γ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g .

Άρα $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

δ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)+2x-2\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$

Δηλαδή η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τη C_g .

Άρα $x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$.

26. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

306 Θέμα 2 – 13033

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=-\dfrac{1}{2}x+4$.

α. i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

β. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6,1)$, $B(-2,3)$ και $\Gamma(8,0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).

γ. Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k,5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

Λύση

α. i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha<0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega<0$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β. Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

- Για το σημείο Α: $-\dfrac{1}{2}\cdot 6+4=-3+4=1$, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.
- Για το σημείο Β: $-\dfrac{1}{2}\cdot(-2)+4=1+4=5\ne 3$, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.
- Για το σημείο Γ: $-\dfrac{1}{2}\cdot 8+4=-4+4=0$, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ. Θα πρέπει: $5=-\dfrac{1}{2}\cdot k+4 \Leftrightarrow 1=-\dfrac{1}{2}\cdot k \Leftrightarrow 2=-k \Leftrightarrow k=-2$.

307 Θέμα 2 – 13400

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$.

α. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα $x'x$.

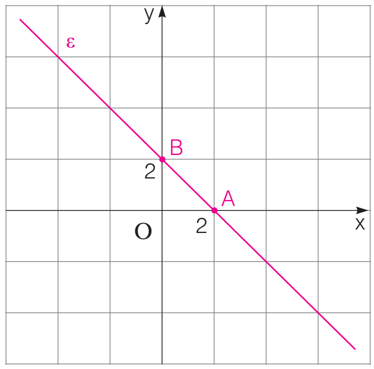
β. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

γ. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

Λύση

α. Η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β. • Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας *ε* με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της, όπου $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2, 0)$.



• Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας *ε* με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0, 2)$.

γ. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα β., τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο διπλανό σχήμα.

308 Θέμα 2 – 12630

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

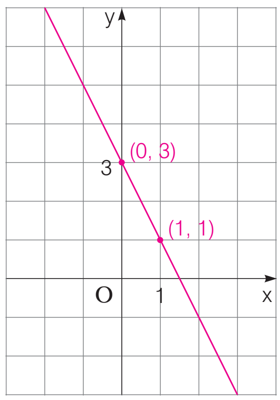
α. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

β. Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

γ. Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

Λύση

α. • Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$, οπότε η εξίσωσή της γίνεται $y = -2x + \beta$.



• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο (1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή: $1 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 3$.

β. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε:
$$y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$$

γ. Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

309 Θέμα 2 – 13178

Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

β. Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM.

- **i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.**
- **ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O.**

Λύση

α. Η κλίση της ευθείας OM είναι $\alpha = \dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \dfrac{4}{3}x$.

β. i. Το σημείο N ανήκει στην ευθεία OM οπότε οι συντεταγμένες του N επαληθεύουν την εξίσωση της OM, δηλαδή ισχύει ότι: $\lambda=\frac{4}{3}\cdot(-3)\Leftrightarrow\lambda=-4$.

ii. Τα σημεία $M(3\,,4)$ και $N(-3\,,-4)$ έχουν αντίθετες συντεταγμένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς το O.

310 Θέμα 2 – 12856

Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+5$. Αν η ευθεία $\delta: y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α. i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$;

β. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

α. i. Είναι $\varepsilon // \delta$, οπότε $\alpha=-3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha=-3<0$.

β. Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-3x+5$. Για $y=0$ έχουμε $-3x+5=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

Άρα, το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $\left(\frac{3}{5},0\right)$.

Για $x=0$ έχουμε $y=5$.

Άρα, το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $(0, 5)$.

311 Θέμα 2 – 12730

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o} και διέρχεται από το σημείο $A(0\,,3)$.

β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x+3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

Λύση

α. • Η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o}, οπότε $\alpha=\varepsilon\varphi 45^{o}$, άρα η ευθεία παίρνει τη μορφή $y=x+\beta$.

• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$, οπότε $3=0+\beta\Leftrightarrow\beta=3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y=x+3$.

β. • Οι ευθείες $y=x+3$ και $y=\lambda x+\kappa$ είναι παράλληλες, οπότε $\lambda=1$ και $\kappa\neq3$. Άρα η ευθεία είναι $y=x+\kappa$, $\kappa\neq3$.

• Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2, 0)$, οπότε $0=2+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$, δεκτή.

Άρα $\lambda=1$ και $\kappa=2$.

312 Θέμα 2 – 12684

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4\,,1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α. Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

Λύση

α. Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

Για $x=0$ είναι $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-2=-2$, οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

β. Είναι $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$ οπότε $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ είναι $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{1}{2}$.

γ. Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(-4,1)$, οπότε

$$1=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+\beta \Leftrightarrow 1=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x-1$.

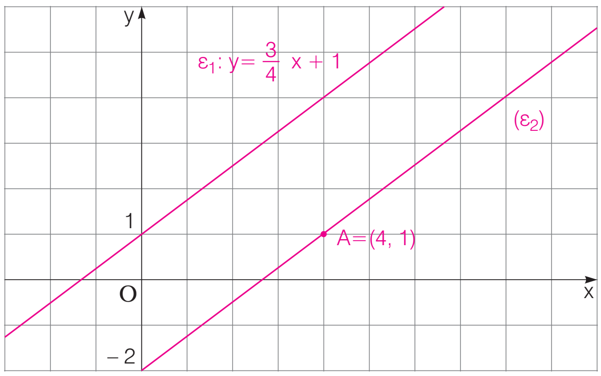
Για $x=0$ είναι $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$ οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-1)$.

Για $y=0$ έχουμε $0=-\frac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow 1=-\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2=-x \Leftrightarrow x=-2$.

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2,0)$.

313 Θέμα 2 – 12631

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y=\frac{3}{4}x+1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2).

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

Λύση

α. Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1=\frac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2=\frac{3}{4}$.

β. Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1=\frac{3}{4}\cdot 4+\beta \Leftrightarrow 1=3+\beta \Leftrightarrow \beta=-2$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=\frac{3}{4}x-2$.

γ. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$, αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y=\frac{3}{4}\cdot 0-2=-2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{8}{3},0)$, αφού για $y=0$ έχουμε:

$$0=\frac{3}{4}x-2 \Leftrightarrow 2=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 8=3x \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$

314 Θέμα 2 – 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(3\alpha+4)x-4$ και $\varepsilon_2: y=(3-4\alpha)x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Αν $\alpha=1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες.

Λύση

α. i. Με $\alpha=1$ οι ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1: y=7x-4 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y=-x+4$$

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_1=7>0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα x'x οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2=-1<0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β. Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει

$$3\alpha+4=3-4\alpha \Leftrightarrow 7\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha=-\dfrac{1}{7}$.

315 Θέμα 2 – 12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3,0)$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

β. Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

Λύση

α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται:

- από το σημείο $A(0,-6)$, οπότε $-6=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow -6=\beta$, άρα $\varepsilon_1: y=\alpha x-6$.
- από το σημείο $B(-3,0)$, έχουμε $0=\alpha\cdot(-3)-6 \Leftrightarrow 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

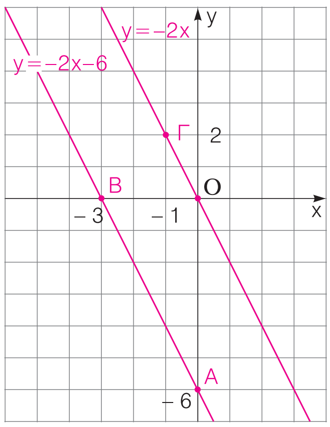
Άρα $\varepsilon_1: y=-2x-6$.

β. Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=\alpha x$.

Είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα $\alpha=-2$, $\varepsilon_2: y=-2x$.

γ. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία $A(0,-6)$ και $B(-3,0)$. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $\Gamma(-1,2)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



316 Θέμα 2 – 1294

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0)=5 \quad \text{και} \quad f(1)=3$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

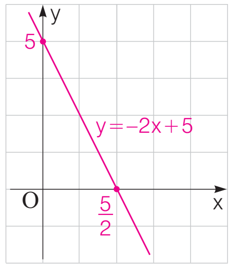
β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Λύση

α. Έχουμε $f(0)=5 \Leftrightarrow \beta=5$, οπότε $f(x)=\alpha x+5$. Είναι $f(1)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+5=3 \Leftrightarrow \alpha=-2$. Άρα $\alpha=-2$ και $\beta=5$.

β. Είναι $f(x)=-2x+5$. Έχουμε $f(0)=5$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow -2x+5=0 \Leftrightarrow -2x=-5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,5)$ και τον $x'x$ στο $B(\frac{5}{2},0)$.



γ. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $\varepsilon: y=-2x+5$ και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

317 Θέμα 2 – 13318

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-x+\sqrt{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $\left[f(-\sqrt{2})\right]^2$.

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια *να* σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

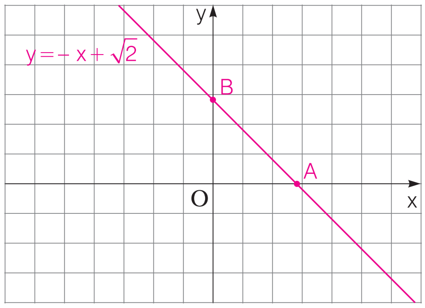
Λύση

α.
- $f(0)=-0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.
- $f(\sqrt{2})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$.
- $f(-\sqrt{2})=-(-\sqrt{2})+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.
- $\left[f(-\sqrt{2})\right]^2=(2\sqrt{2})^2=2^2\cdot(\sqrt{2})^2=4\cdot 2=8$.

β. Για $x=0$, έχουμε βρει από το **α.** ερώτημα $y=f(0)=\sqrt{2}$, ενώ για $y=0$ παίρνουμε $0=-x+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$, δηλαδή $f(\sqrt{2})=0$, τιμή που βρέθηκε στο **α.** ερώτημα.

Έτσι, βρήκαμε τα σημεία $B(0,\sqrt{2})$ και $A(\sqrt{2},0)$, τα οποία είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $y=f(x)=\alpha x+\beta$ με $x\in\mathbb{R}$, $(\alpha\cdot\beta\neq 0)$ οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.



318 Θέμα 2 – 1275 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

319 Θέμα 2 – 1302 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

320 Θέμα 4 – 13475 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

321 Θέμα 4 – 13367

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=(\omega^2-6\omega+8)x+2$ όπου $\omega\in\mathbb{R}$.

α. Για τις διάφορες τιμές του $\omega\in\mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα $x'x$.

β. Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

- **i. Να αποδείξετε ότι $\omega=3$.**
- **ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας *ε* με τους άξονες.**
- **iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.**

Λύση

α. Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$

και οι ρίζες: $\omega_{1,2} \dfrac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = 4$ και $\omega_2 = 2$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

ω	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\omega^2 - 6\omega + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

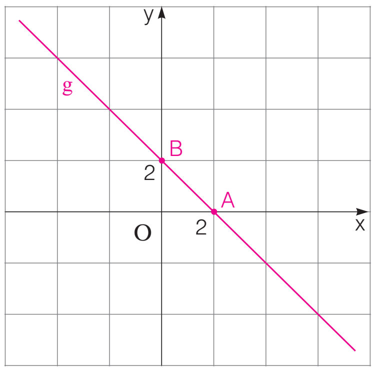
- Αν $\omega \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία.
- Αν $\omega \in (2, 4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης *α* είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.
- Αν $\omega = 2$ ή $\omega = 4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία *ε* σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, είναι δηλαδή παράλληλη στον $x'x$.

β. i. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ πρέπει $\omega \in (2, 4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος, τότε $\omega = 3$.

ii. Για $\omega = 3$ είναι $\varepsilon: y = -x + 2$.

- Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2, 0)$.
- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0, 2)$.

γ. Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο διπλανό σχήμα.



322 Θέμα 4 – 1403

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B.

Λύση

α. Πρέπει $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-3, 3)$.

β. Είναι $f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B(0, \dfrac{2}{3})$ και τον $x'x$ στο $A(-2, 0)$.

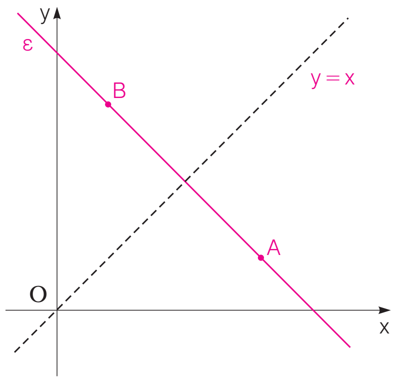
γ. Έστω $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Έχουμε $\dfrac{2}{3} = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{2}{3}$, οπότε $y = \alpha x + \dfrac{2}{3}$ και

$0 = \alpha \cdot (-2) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow -2\alpha + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow -6\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow -6\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$.

Άρα $\varepsilon : y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

323 Θέμα 4 – 13298



Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Αν $A(x_A , y_A)$ και $B(x_B , y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

γ. Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4 , \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2 , 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

Λύση

α. Αφού τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$.

β. Η κλίση της ευθείας *ε* που διέρχεται από τα σημεία A , B δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

η οποία για τα $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$, όπως προκύπτει από το ερώτημα α. γίνεται:

$$\alpha = \frac{x_A - y_A}{y_A - x_A} = -1$$

γ. i. Από τη σχέση $y_A = x_B$ για $y_A = \kappa^2 - 3\kappa + 1$ και $x_B = \kappa - 2$ έχουμε:

$\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες: $\kappa_1 = 1$ και $\kappa_2 = 3$.

Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει $y_A > 0$ και $x_B > 0$.

- Για $\kappa_1 = 1$ έχουμε $y_A = x_B = -1 < 0$, απορρίπτεται.
- Για $\kappa_2 = 3$ έχουμε $y_A = x_B = 1 < 0$, δεκτή.

Άρα $\kappa = 3$.
Οπότε, τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4 , 1)$ και $(1 , 4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και κλίση $\alpha = -1$, άρα $y = -x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο A που για $\kappa = 3$ έχει συντεταγμένες $(4 , 1)$, θα ισχύει:

$$1 = -4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5$$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y = -x + 5$.

324 Θέμα 4 – 1523

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α. **Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.**

β. **Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3 \ , & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$**

γ. **Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.**

δ. **Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.**

Λύση

α. Πρέπει $|2-x|\neq 0 \Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow -x\neq -2 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

β. Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει:

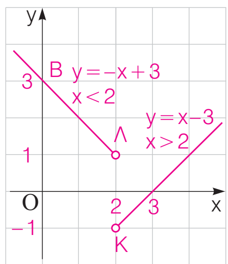
- $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$
- $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm1}{2}$. Οπότε $x=\dfrac{6}{2}=3$ ή $x=\dfrac{4}{2}=2$.

Άρα $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Είναι $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{|x-2|}$, $x\in A$.

- Αν $x>2$, τότε $|x-2|=x-2$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}=x-3$.
- Αν $x<2$, τότε $|x-2|=-(x-2)$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)}=-(x-3)=-x+3$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} x-3 \ \ , & \text{αν } x>2 \\ -x+3, & \text{αν } x<2 \end{cases}$



γ. Η γραφική παράσταση της f είναι οι ημιευθείες ΚΑ , ΛΒ εκτός τα Κ και Λ . Η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(3, 0)$ και τον $y'y$ στο $B(0, 3)$.

δ. • Αν $x>2$, τότε $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x-3\le 0 \Leftrightarrow x\le 3$. Οπότε $x\in(2, 3]$.

• Αν $x<2$, τότε $f(x)\le 0 \Leftrightarrow -x+3\le 0 \Leftrightarrow x\ge 3$. Οπότε η ανίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x\in(2, 3]$.

325 Θέμα 4 – 12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α. **Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=8$.**

β. **Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$.**

γ. **Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=2$.**

Λύση

α. Είναι: $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2=3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=4+4=8$

β. Ένα σημείο $M\left(x, f(x)\right)$ της γραφικής παράστασης της f, βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=4$ όταν ισχύει

$$f(x)<4 \Leftrightarrow (x-1)^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1, 3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1, 3)$ είναι οι: 0, 1, 2 και επειδή $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(2, 1)$.

γ. Είναι $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow (\alpha-1)^2=(\beta-1)^2 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2-(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-1+\beta-1)(\alpha-1-\beta+1)=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-2)(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-2=0$ ή $\alpha=\beta$, που απορρίπτεται

Οπότε $\alpha+\beta=2$.

326 Θέμα 4 – 1447

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{αν } x<0 \\ x+2, & \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β. i. Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

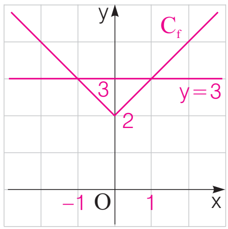
ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. i. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα γ.i., να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος β.ii., αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

Λύση

α. Είναι $f(0)=0+2=2$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 2)$.



β. i. Οι εκτιμούμενες συντεταγμένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=3$ είναι $(-1, 3)$ και $(1, 3)$.

ii. Επειδή τα σημεία $(-1, 3)$ και $(1, 3)$ έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

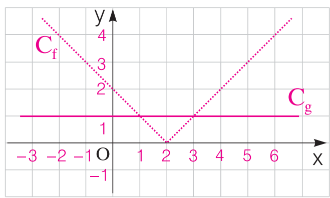
γ. i. Από τη C_f έχουμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, όταν $\alpha>2$.

ii. Έχουμε $\alpha>2$.

- Για $x<0$, είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=-(\alpha-2)<0$, δεκτή.
- Για $x\ge 0$, είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+2=\alpha \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=\alpha-2>0$, δεκτή.

Άρα τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ είναι τα $\left(-(\alpha-2), \alpha\right)$ και $(\alpha-2, \alpha)$ τα οποία έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες. Οπότε είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

327 Θέμα 4 – 1514



Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. i. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii. Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $A=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$.

Λύση

α. i. Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

ii. Οι εκτιμούμενες τιμές του x είναι: $x \in (1,3)$.

β. Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=-1$ ή $x-2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

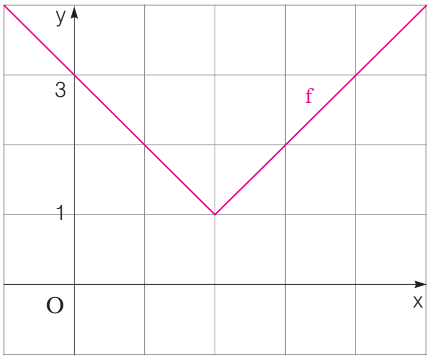
Άρα τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα $A(1,1)$ και $B(3,1)$.

Έχουμε $f(x)<g(x) \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3 \Leftrightarrow x \in (1,3)$.

γ. Πρέπει $\begin{cases} 1-f(x) \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-|x-2| \geq 0 \\ |x-2| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \leq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1,3] \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2) \cup (2,3]$.

328 Θέμα 4 – 12914

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=c$ με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α. i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α. i..

β. Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

γ. i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β., με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ. i..

Λύση

α. i. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y=c$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι για να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f πρέπει $c \geq 1$.

ii. Για να έχει κοινά σημεία η ευθεία $\varepsilon: y=c$ με τη γραφική παράσταση της f, πρέπει η εξίσωση $|x-2|+1=c \Leftrightarrow |x-2|=c-1$ να έχει λύση. Επειδή είναι $|x-2| \geq 0$, αρκεί $c-1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β. Για $c \geq 1$ είναι $|x-2|=c-1 \Leftrightarrow x-2=c-1$ ή $x-2=-(c-1) \Leftrightarrow x=c+1$ ή $x=3-c$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

γ. i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2.

Άρα $1 \leq c \leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι

$$(AB)=|c+1-(3-c)|=|2c-2|$$

Άρα $(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c-2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c-2 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq c-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2$.

Από το ερώτημα **α.** πρέπει $c \geq 1$, οπότε $1 \leq c \leq 2$.

329 Θέμα 4 – 12681

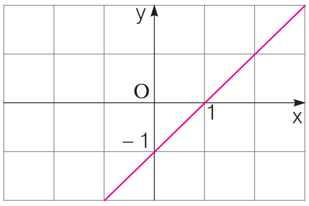
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)$ με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=2-|x-3|$.

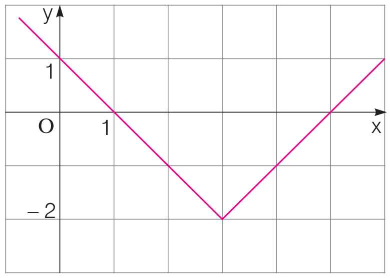
β. Αφού δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-1\,, & \text{αν } x<3 \\ 5-x\,, & \text{αν } x\ge 3\end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:

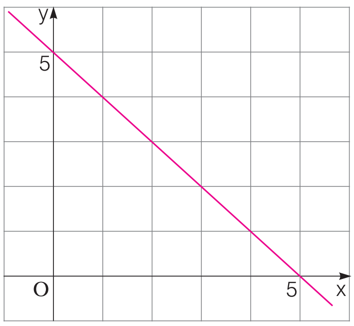
1.



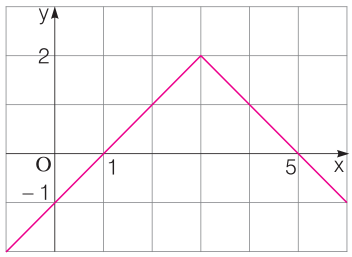
2.



3.



4.



γ. i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y=-1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2-|x-3|>-1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

Λύση

α. Είναι $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2) \Leftrightarrow f(x)=|x-3|+4-|2(3-x)|-2 \Leftrightarrow f(x)=|x-3|-2|3-x|+2$

$$\Leftrightarrow f(x)=2-|x-3|$$

β. • Αν $x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3$ είναι $|x-3|=x-3$, οπότε $f(x)=2-(x-3)=2-x+3=5-x$.

• Αν $x-3<0 \Leftrightarrow x<3$ είναι $|x-3|=3-x$, οπότε $f(x)=2-(3-x)=2-3+x=x-1$.

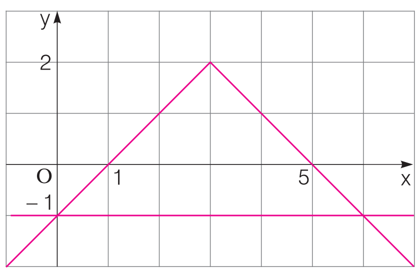
Άρα $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x<3 \\ 5-x, & \text{αν } x\ge 3\end{cases}$

Για $x\ge 3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=5-x$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(3, 2)$ και $(5, 0)$.

Για $x<3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=x-1$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(0, -1)$ και $(1, 0)$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ. i. Αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y=-1$ έχουμε το διπλανό σχήμα.



Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y=-1$.

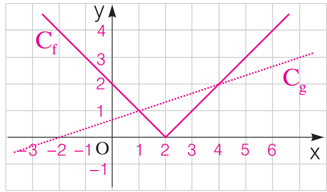
Από το σχήμα προκύπτει ότι $0<x<6$.

ii. Είναι $2-|x-3|>-1 \Leftrightarrow -|x-3|>-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-3|<3 \Leftrightarrow -3<x-3<3 \Leftrightarrow 0<x<6$.

330 Θέμα 4 – 1468

Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με



$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \text{ , } x\in\mathbb{R}$$

α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα α. .

γ. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

δ. Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ. , να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$

Λύση

α. Οι ζητούμενες συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g ειναι $(1,1)$ και $(4,2)$.

β. Είναι $f(x)=\begin{cases} x-2 & ,\ \text{αν } x\ge 2 \\ -x+2, & \text{αν } x<2 \end{cases}$

- Αν $x<2$, τότε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x+2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow -3x+6=x+2\Leftrightarrow -4x=-4\Leftrightarrow x=1$
- Αν $x\ge 2$, τότε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x-6=x+2\Leftrightarrow 2x=8\Leftrightarrow x=4$.

Είναι $f(1)=1$ και $f(4)=2$. Οπότε τα κοινά σημεία των C_f , C_g είναι τα σημεία $(1,1)$ και $(4,2)$.

γ. Οι ζητούμενες τιμές του x είναι: $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

δ. Πρέπει $3|2-x|-(x+2)\ge 0\Leftrightarrow |x-2|\ge\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)\overset{\gamma.}{\Leftrightarrow} x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.

331 Θέμα 4 – 12944

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\ne 0$.

α. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=f(2)+g(2)-f(\frac{1}{2})-g(\frac{1}{2})$.

β. Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2-(g(x))^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\ne 0$.

γ. Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\ge 2$.

Λύση

α. Είναι $A=2+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=4-\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+2=4-1=3$.

β. Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\ne 0$ έχουμε:

$$(f(x))^2-(g(x))^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)=2x\cdot\frac{2}{x}=4$$

γ. Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι: $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\alpha\Leftrightarrow x^2+1=\alpha x\Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$.

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta\ge 0\Leftrightarrow \alpha^2-4\ge 0\Leftrightarrow \alpha^2\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}\ge\sqrt{4}\Leftrightarrow|\alpha|\ge 2$.

332 Θέμα 4 – 12682

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-(x-1)^2$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases} x+1 , & x\geq 1 \\ -x+3 , & x<1\end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g.

γ. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράταση της g.

Λύση

α. Η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν

$$f(x)<0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2<0 \Leftrightarrow -(x-1)^2<-1 \Leftrightarrow (x-1)^2>1$$

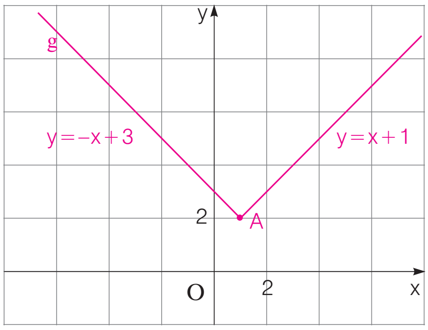
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}>1 \Leftrightarrow |x-1|>1 \Leftrightarrow x-1<-1 \text{ ή } x-1>1$$

$$\Leftrightarrow x<0 \text{ ή } x>2$$

Άρα $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

β. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$, τότε $|x-1|=x-1$, οπότε $g(x)=x-1+2=x+1$.
- Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, οπότε $g(x)=-x+1+2=-x+3$.



Άρα $g(x)=\begin{cases} x+1 , & x\geq 1 \\ -x+3, & x<1\end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

- από το τμήμα της ευθείας $y=x+1$, όταν $x\geq 1$
- από το τμήμα της ευθείας $y=-x+3$, όταν $x<1$

Η γραφική παράσταση C_g φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ. Η C_f είναι κάτω από τη C_g όταν $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-(x-1)^2-|x-1|-2<0 \Leftrightarrow -|x-1|^2-|x-1|-1 \Leftrightarrow |x-1|^2+|x-1|+1>1$, (1)

Αν θέσουμε $|x-1|=\omega$ τότε η $(1)\Leftrightarrow \omega^2+\omega+1>0$, που ισχύει, αφού είναι τριώνυμο του ω, με $\alpha=-1<0$ και διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4(-1)(-1)=1-4=-3<0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)-g(x)<0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

333 Θέμα 4 – 1449

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

α. Τα ζητούμενα κοινά σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξισώσης

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

β. Έχουμε: • $f(1)=1^2-2\cdot 1=1-2=-1$ • $f(4)=4^2-2\cdot 4=16-8=8$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι $A(1,-1)$ και $B(4,8)$.

Τα ζητούμενα διαστήματα είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-2x<3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow x\in(1,4)$.

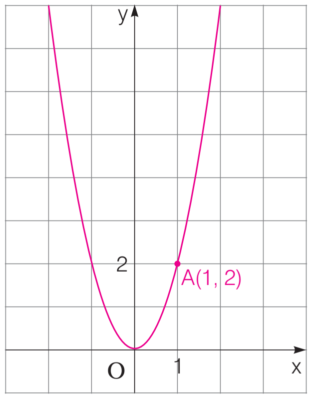
x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	−	0	+	

γ. Αρκεί να δείξουμε ότι, για $\alpha<-1$ είναι $f(x)>\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x>\alpha \Leftrightarrow x^2-2x-\alpha>0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1-\alpha \Leftrightarrow (x-1)^2+(-\alpha-1)>0$, που ισχύει.

334 Θέμα 4 – 12942

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α .



α. **Αν το σημείο $A(1\,,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha=2$.**

β. i. **Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1\,,6)$ και έχει κλίση $\lambda=2$.**

ii. **Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.**

γ. i. **Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.**

ii. **Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.**

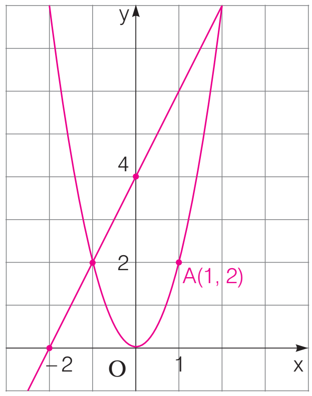
Λύση

α. Αφού το σημείο $A(1\,,2)$ ανήκει στη C_f ισχύει $f(1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2$.

β. i. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ έχει κλίση λ, άρα $\lambda=2$.

Επίσης, το σημείο $B(1\,,6)$ ανήκει στην ευθεία, άρα $6=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=4$.

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y=2x+4$.



ii. Για $y=0$ έχουμε $0=2x+4 \Leftrightarrow x=-2$ άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο $(-2\,,0)$.

Επίσης, για $x=0$ είναι $y=2\cdot 0+4 \Leftrightarrow y=4$,άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο $(0\,,4)$.

Τοποθετούμε τα παραπάνω σημεία στο σχήμα και χαράσσουμε την ευθεία ε.

γ. i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x\in(-1\,,2)$.

ii. Είναι $f(x)<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες: $x_1=2$ και $x_2=-1$.

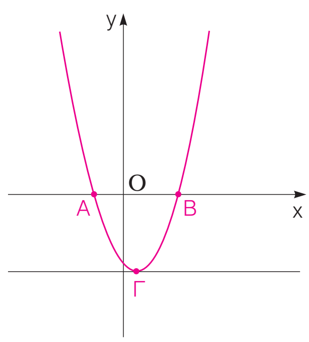
Και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(-1\,,2)$.

335 Θέμα 4 – 13314

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν $A(\alpha\,,0)$, $B(\beta\,,0)$, $\Gamma(\gamma\,,\delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α. **Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.**

β. **Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.**

γ. **Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.**

δ. **Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.**

Λύση

α. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α, β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 13$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται αριστερά του B στον άξονα $x'x$ είναι $\alpha<\beta$ και επειδή προφανώς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β. Είναι $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}-3=2-\sqrt{2}-3=-1-\sqrt{2}<0$, οπότε $f(\sqrt{2})<0$.

γ. Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για $x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β. ερώτημα ότι $f(\sqrt{2})<0$, θα πρέπει $\sqrt{2}\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, δηλαδή $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ. Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma,\delta)$ στον $x'x$ έχει εξίσωση $y=\delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y=\delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν.

Είναι $\Delta=0 \Leftrightarrow (-1)^2-4(-3-\delta)=0 \Leftrightarrow 1+12+4\delta=0 \Leftrightarrow \delta=-\frac{13}{4}$.

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης

$f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$, οπότε $\gamma=-\frac{-1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$.

336 Θέμα 4 – 13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για $\lambda\neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ. Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α. Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+16\lambda^2>0$ που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β. Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2$ είναι $P=-4\lambda^2<0$, αφού $\lambda\neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda\neq 0$.

γ. Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4,-4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$f(4)=-4 \Leftrightarrow 16-4(\lambda-1)-4\lambda^2=-4 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-3$.

δ. Για $\lambda = -1$, $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Πρέπει $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$

Το τριώνυμο έχει: $\Delta = 20$

και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

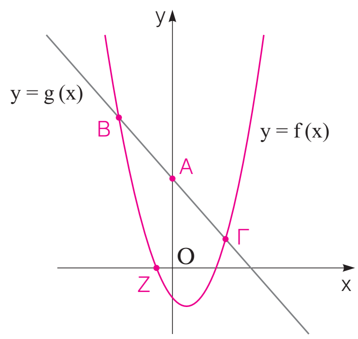
Αφού $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στο διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $f(x) < 0$ για $x \in (-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$.

337 Θέμα 4 – 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.



α. **Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.**

β. **Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$.**

γ. **Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.**

Λύση

α. • Το σημείο Ζ έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση x_1 της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία γράφεται $x^2 - x - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$ και

$x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$. Άρα $Z\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

- Το σημείο Α έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $g(0) = 3 - 0 = 3$, έτσι $A(0, 3)$.
- Τα σημεία Β και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Το σημείο Β βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.

Οι τεταγμένες των σημείων Β και Γ θα είναι:

$f(-2) = g(-2) = 3 - (-2) = 5$ και $f(2) = g(2) = 3 - 2 = 1$ αντίστοιχα.

Άρα $B(-2, 5)$, $\Gamma(2, 1)$.

β. Πρέπει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 3 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 > 2^2 \Leftrightarrow |x| > |2| \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$.

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| \geq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$$|f(\alpha) + g(\alpha)| \geq 1 \Leftrightarrow |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| \geq 1 \Leftrightarrow |\alpha^2 - 2\alpha + 2| \geq 1 \text{ , } (1)$$

Έτσι η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$|(\alpha - 1)^2 + 1| \geq 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ , που ισχύει για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Το τριώνυμο $\alpha^2 - 2\alpha + 2$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$, οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του α^2 δηλαδή του 1, άρα πάντα θετικό για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Οπότε $|\alpha^2 - 2\alpha + 2| = \alpha^2 - 2\alpha + 2$.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα $\alpha^2 - 2\alpha + 2 \geq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

338 Θέμα 4 – 13479

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|3x-12|-|2x-8|-3|x^2-16|$.

Αν $|x|\le 4$ τότε:

α. Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β. Αν $f(x)=3x^2-x-44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu+1\,,-20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

Λύση

α. Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x)=|3x-12|-|2x-8|-3|x^2-16|=$$
$$=3|x-4|-|x-4|-3|(x-4)(x+4)|$$
$$=|x-4|-3|x-4|\cdot|x+4|=$$

Είναι $|x|\le 4 \Leftrightarrow -4\le x\le 4 \Rightarrow x-4\le 0$ και $x+4\ge 0$.

Άρα: $f(x)=-(x-4)+3(x-4)(x+4)=-x+4+3(x^2-16)=3x^2-x-44$

β. i. • Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή $3x^2-x-44=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta=1+4\cdot 3\cdot 44=529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{529}}{6}=\frac{1\pm 23}{6}.\ \text{Δηλαδή}\ x_1=\frac{24}{6}=4\ \text{και}\ x_2=\frac{-22}{6}=-\frac{11}{3}$$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4\,,4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4\,,0)$ και $B(-\frac{11}{3}\,,0)$.

• Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x=0$ και βρίσκουμε $y=f(0)=-44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0\,,-44)$.

ii. Αφού το σημείο $M(\mu+1\,,-20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει:

$\mu+1\in[-4\,,4]$ και $f(\mu+1)=-20$.

Είναι: $f(\mu+1)=-20 \Leftrightarrow 3(\mu+1)^2-\mu-1-44=-20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\mu^2+6\mu+3-\mu-45+20=0 \Leftrightarrow 3\mu^2+5\mu-22=0$

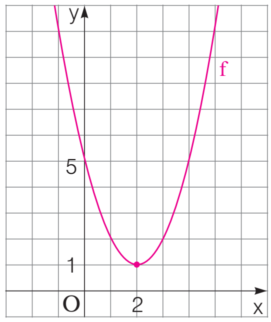
Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=25-4\cdot 3\cdot(-22)=289$ και οι ρίζες:

$$\mu_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{289}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm 17}{6}\ .\ \text{Δηλαδή}\ \mu_1=\frac{12}{6}=2\ \text{και}\ \mu_2=\frac{-22}{6}=-\frac{11}{3}$$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu=2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu+1\in[-4\,,4]$.

339 Θέμα 4 – 13091

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



α. **Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.**

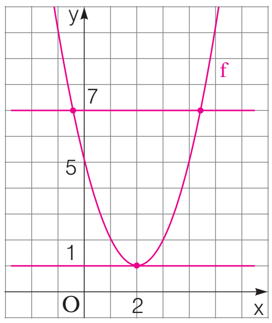
β. i. **Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.**

ii. **Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β. i.**

γ. **Έστω ότι μια ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1<x_2$. Να δείξετε ότι $x_1+x_2=4$.**

Λύση

α. Η ευθεία $y=7$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0\,,7)$ και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.



Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=7$ είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=7$. Είναι

$$f(x)=7 \Leftrightarrow x^2-4x+5-7=0 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=24>0$ που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y=7$ ακριβώς δύο κοινά σημεία.

β. i. Η ευθεία $y=\lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0\,,\lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν $\lambda<1$ η ευθεία $y=\lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda=1$ η ευθεία $y=\lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda>1$ η ευθεία $y=\lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta=(-4)^2-4(5-\lambda)=16-20+4\lambda=4\lambda-4=4(\lambda-1)$$

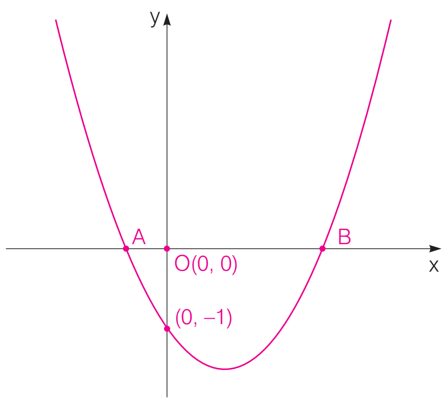
Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας. Συγκεκριμένα :

- αν $\lambda<1$ τότε $\Delta<0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y=\lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda=1$ τότε $\Delta=0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y=\lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f,
- αν $\lambda>1$ τότε $\Delta>0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y=\lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f.

γ. Αφού η ευθεία $y=\lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1 , x_2 με $x_1<x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda>1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1 , x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda>1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι
$x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-4}{1}=4$.

340 Θέμα 4 – 13168



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2\lambda x+\gamma$ με $x\in\mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,-1)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma=-1$

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία Α και Β με συντεταγμένες $A(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}\ ,\ 0)$ και $B(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\ ,\ 0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των Α και Β είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

α. i. Ισχύει ότι $f(0)=-1 \Leftrightarrow 0^2+2\cdot\lambda\cdot0+\gamma=-1 \Leftrightarrow \gamma=-1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$ αρκεί:
$f(x)\ge-\lambda^2-1 \Leftrightarrow x^2+2\lambda x-1\ge-\lambda^2-1 \Leftrightarrow x^2+2\lambda x+\lambda^2\ge0$, η οποία γράφεται $(x+\lambda)^2\ge0$ που ισχύει.

β. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2\lambda x-1=0$.

Η διακρίνουσα είναι:
$\Delta=(2\lambda)^2-4(-1)=4\lambda^2+4=4(\lambda^2+1)>0$,

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:
$x_{1,2}=\dfrac{-2\lambda\pm\sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1}$. Άρα $x_1=-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}$ και $x_2=-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$.

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2+1}<\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow -\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}<-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1}\ ,0\right)$ και $B\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\ ,0\right)$.

γ. Η απόσταση των Α και Β είναι:
$(AB)=|x_2-x_1|=|-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}-(-\lambda-\sqrt{\lambda^2+1})|=|2\sqrt{\lambda^2+1}|$.

Οπότε:

$$(AB)\ge2 \Leftrightarrow |2\sqrt{\lambda^2+1}|\ge2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1}\ge1 \Leftrightarrow \lambda^2+1\ge1 \Leftrightarrow \lambda^2\ge0$$

που ισχύει.

341 Θέμα 4 – 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|\kappa|x-2$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-\kappa^2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

γ. Για $\kappa=-3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

δ. Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ., να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

Λύση

α. Το τριώνυμο έχει $\Delta=4\kappa^2+8>0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β. Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2|\kappa|x-2=2x-\kappa^2 \Leftrightarrow x^2-2(|\kappa|+1)x+\kappa^2-2=0$$

Είναι $\Delta=4(|\kappa|+1)^2-4(\kappa^2-2)=4(2|\kappa|+3)>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

γ. Για $\kappa=-3$ είναι $f(x)=x^2-6x-2$ και $y=2x-9$.

Οπότε $f(x)=y \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$, η οποία έχει

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 7=64-28=36$$

και ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{8\pm 6}{2}$.

Άρα $x_1=1$ και $x_2=7$.

Τα σημεία τομής είναι $A(1,-7)$ και $B(7,5)$.

δ. Είναι $(AB)=\sqrt{(1-7)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{36+144}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$.

342 Θέμα 4 – 13055

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$.

β. Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)$.

γ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

δ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

Λύση

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(2+x)=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+4x+4-4x-8+5=x^2+1$$

και

$$f(2-x)=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2-4x+4+4x-8+5=x^2+1$$

οπότε $f(2+x)=f(2-x)$.

β. Με $x=1,52$ η ισότητα του ερωτήματος α. δίνει

$$f(2+1,52)=f(2-1,52),\ \text{οπότε}\ f(3,52)-f(0,48)=0 \quad (1)$$

ενώ με $x=1,48$ δίνει

$$f(2+1,48)=f(2-1,48),\ \text{οπότε}\ f(3,48)-f(0,52)=0 \quad (2)$$

Με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48) = f(3,52) - f(0,48) + f(3,48) - f(0,52) = 0$$

γ. Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 2x + \beta$. Με $x = -5$ έχουμε:

$$f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία όταν $\beta = -5$.

δ. Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία, $y = 2x + \beta$, μόνο όταν η εξίσωση $f(x) = 2x + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Είναι:

$$f(x) = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2x + \beta \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \beta = 0$$

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση μόνο όταν η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι μη αρνητική.

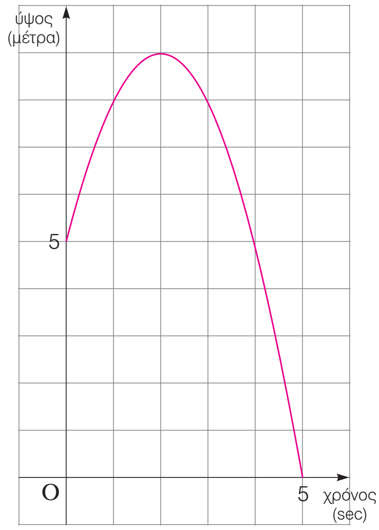
Είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4(5 - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 5 + \beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -4$$

οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta = -4$.

343 Θέμα 2 – 12729

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



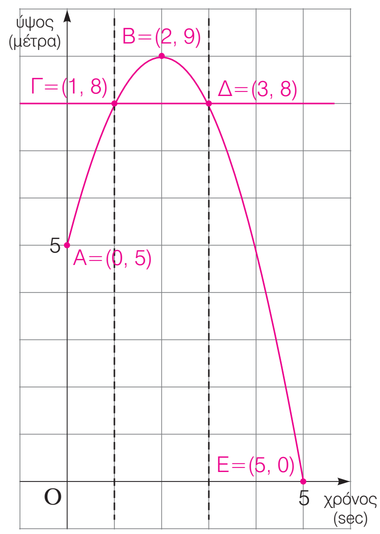
α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

Λύση



α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο A(0, 5) . Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

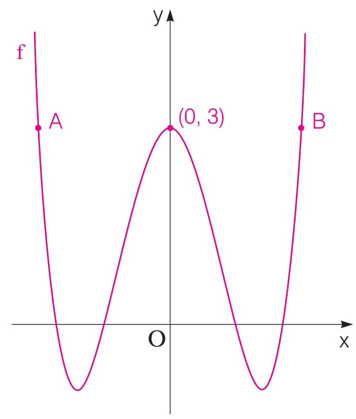
β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο B(2, 9) . Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία $y = 8$ που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων βρίσκουμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία Γ(1, 8) και Δ(3, 8) . Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3 = 1$ sec και $t_4 = 3$ sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ και το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το E . Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5 = 5$ sec.

344 Θέμα 4 – 13454

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^4-4x^2+\gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α. Να δείξετε ότι $\gamma=3$.

β. Αν $A(\alpha^2-3\,,3)$ και $B(5-3\alpha\,,3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

γ. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ. Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ., να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

α. Από τη γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι $f(0)=3$, άρα $\alpha\cdot 0^2-4\cdot 0+\gamma=3$, οπότε $\gamma=3$.

β. Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$\alpha^2-3=-(5-3\alpha)\Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1>0$ και οι ρίζες της:

$\alpha_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\dfrac{3\pm1}{2}$. Βρίσκουμε $\alpha_1=2$ και $\alpha_2=1$.

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2^o τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha^2-3<0$.

- Για $\alpha=2$ είναι $2^2-3=1>0$ άρα η λύση $\alpha=2$ απορρίπτεται.
- Για $\alpha=1$ είναι $1^2-3=-2<0$ άρα η λύση $\alpha=1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι: $f(x)=x^4-4x^2+3$

γ. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4-4x^2+3=0$ η οποία για $x^2=w>0$ γίνεται $w^2-4w+3=0\Leftrightarrow w=1$ ή $w=3$.

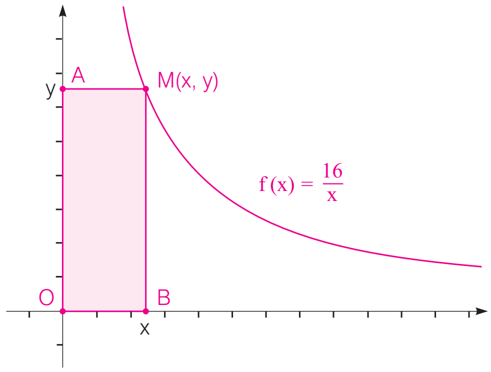
Άρα

- $x^2=1\Leftrightarrow\{x=1 \text{ ή } x=-1\}$,
- $x^2=3\Leftrightarrow\{x=\sqrt{3} \text{ ή } x=-\sqrt{3}\}$.

δ. Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3}<x<-1 \text{ ή } 1<x<\sqrt{3}$$

345 Θέμα 4 – 13090



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{16}{x}$, $x>0$.

Ένα σημείο $M(x\,,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του M .

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ. Αν M΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M΄ έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ , δηλαδή ότι $\Pi(x)\ge\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

Λύση

α. Αφού το σημείο $M(x\,,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι $y=f(x)=\frac{16}{x}>0$.

Οι συντεταγμένες του σημείου B είναι $B(x\,,0)$ και του σημείου $A(0\,,\frac{16}{x})$.

Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει εμβαδόν $(OAMB)=(OA)\cdot(OB)=\frac{16}{x}\cdot x=16$ τετραγωνικές μονάδες και περίμετρο

$\Pi(x)=2(OA)+2(OB)=2\cdot\frac{16}{x}+2\cdot x=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$.

β. Αναζητούμε τις τιμές του $x>0$ για τις οποίες

$$\Pi(x)=20\Leftrightarrow 2x+\frac{32}{x}=20\Leftrightarrow 2x^2+32=20x\Leftrightarrow 2x^2-20x+32=0\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x=2$ ή $x=8$.

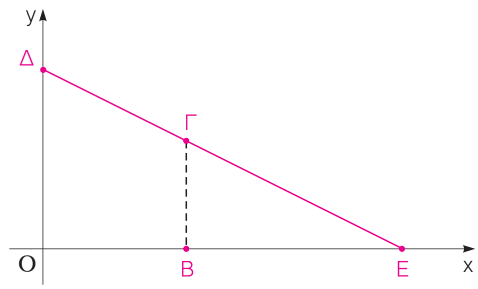
- Για $x=2$ είναι $y=\frac{16}{2}=8$ οπότε $M_1(2\,,8)$.
- Για $x=8$ είναι $y=\frac{16}{8}=2$ οπότε $M_2(8\,,2)$.

γ. i. Το τετράπλευρο ΟΑΜ′Β είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $(OA)=(OB)$ δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x}=x\Leftrightarrow x^2=16$ και επειδή $x>0$ έχουμε ότι $x=4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x)\ge\Pi(4)$ για κάθε $x>0$, δηλαδή ισοδύναμα

$2x+\frac{32}{x}\ge16\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2+32\ge16x\Leftrightarrow 2x^2+32-16x\ge0\Leftrightarrow x^2+16-8x\ge0\Leftrightarrow(x-4)^2\ge0$ που ισχύει για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο ΟΑΜ′Β .

346 Θέμα 4 – 12728



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.

Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ.

Ένα σημείο $\Gamma(t\,,y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t$.

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με $9{,}75$ τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Λύση

α. Για $x=0$, έχουμε: $y+\frac{1}{2}\cdot 0=4 \Leftrightarrow y=4$

Για $y=0$, έχουμε: $0+\frac{1}{2}x=4 \Leftrightarrow x=8$

Άρα η ευθεία τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $\Delta(0,4)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $E(8,0)$.

β. Το Γ είναι σημείο του ΔE ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων $\Delta(0,4)$ και $E(8,0)$. Δηλαδή:

$$0\le t\le 8$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y+\frac{1}{2}x=4$, οπότε:

$$y_\Gamma+\frac{1}{2}t=4 \Leftrightarrow y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t$$

γ. Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση:

$$E=\frac{(O\Delta+B\Gamma)OB}{2}$$

όπου: $O\Delta=y_\Delta=4$, $B\Gamma=4-\frac{1}{2}t$ και $OB=x_\Gamma=t$.

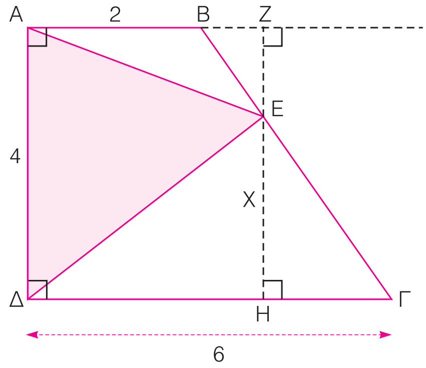
Οπότε $E(t)=\dfrac{\left(4+4-\frac{1}{2}t\right)t}{2}=\dfrac{8t-\frac{1}{2}t^2}{2}=\dfrac{8t}{2}-\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{2}=4t-\frac{1}{4}t^2$, με $t\in[0,8]$.

δ. Είναι $E(t)=9{,}75 \Leftrightarrow 4t-\frac{1}{4}t^2=9{,}75 \Leftrightarrow 16t-t^2=39 \Leftrightarrow t^2-16t+39=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-13)=0$

$\Leftrightarrow t=3$ ή $t=13$, που απορρίπτεται

Άρα $t=3$, οπότε $y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t=4-\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{5}{2}$, δηλαδή $\Gamma(3,\frac{5}{2})$.

347 Θέμα 4 – 12834



Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε $AB=2$, $A\Delta=4$, $\Gamma\Delta=6$, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-2x+12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+...+f\left(\frac{64}{16}\right)$.

Λύση

α. Για το εμβαδόν $(A\Delta E)$ ισχύει:

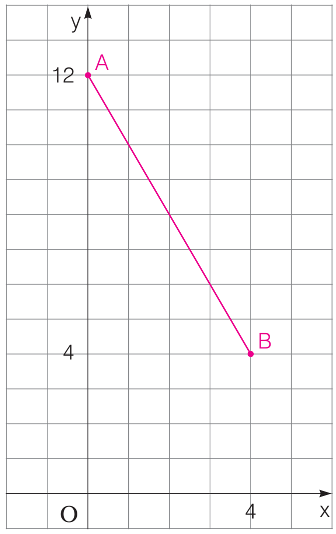
$$(A\Delta E)=(AB\Gamma\Delta)-(ABE)-(\Gamma\Delta E)=\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}\cdot A\Delta-\frac{AB\cdot EZ}{2}-\frac{\Delta\Gamma\cdot EH}{2}$$

$$=\frac{2+6}{2}\cdot 4-\frac{2(4-x)}{2}-\frac{6x}{2}=16-(4-x)-3x$$

$$=16-4+x-3x$$

Οπότε $f(x)=-2x+12$.

Τα μήκη ΕΗ και ΕΖ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x\geq 0$ και $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$, άρα $x\in[0,4]$.



β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-2x+12$ με $x\in[0,4]$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αφού $f(0)=-2\cdot 0+12=12$ και $f(4)=-2\cdot 4+12=-8+12=4$.

γ. $\Sigma=f\left(\frac{1}{16}\right)+f\left(\frac{2}{16}\right)+f\left(\frac{3}{16}\right)+f\left(\frac{4}{16}\right)+\ldots+f\left(\frac{64}{16}\right)=$

$$=(-2\cdot\frac{1}{16}+12)+(-2\cdot\frac{2}{16}+12)+\ldots+(-2\cdot\frac{64}{16}+12)$$

$$=-\frac{2}{16}(1+2+3+\ldots+64)+12\cdot 64$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{64(64+1)}{2}+12\cdot 64=-4\cdot 65+12\cdot 64$$

$$=(-4+12)\cdot 65-12=8\cdot 65-12=520-12=508$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

αφού πρόκειται για άθροισμα ν διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=1$, $\omega=1$, $\alpha_\nu=\nu$, οπότε από τον γνωστό τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ παίρνουμε

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}(1+\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$.

348 Θέμα 4 – 1496

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα "RED" χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα "YELLOW" χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.

Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α. i. **Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "RED" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.**

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

ii. **Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "YELLOW" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.**

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. **Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.**

γ. **Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας "RED" είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.**

δ. **Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία "RED" και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.**

Λύση

α. i. Είναι $f(x)=0,6x+1$, οπότε ο πίνακας γίνεται

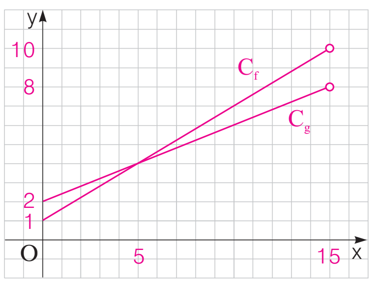
x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)	1	2,2	5,8

ii. Είναι $g(x)=0,4x+2$, οπότε ο πίνακας γίνεται

x (km)	0	3	7
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. Το πεδίο ορισμού των f και g είναι το $A=[0,15)$ και $f(x)=0,6x+1$, $g(x)=0,4x+2$.

γ. Αν η απόσταση είναι $x\in[0,5)$ συμφέρει η "RED", ενώ για $x\in(5,15)$ συμφέρει η "YELLOW", διότι στο διάστημα $[0,5)$ η C_f είναι κάτω από τη C_g, ενώ στο $(5,15)$ η C_g είναι κάτω από τη C_f.



δ. Αν ο πελάτης B διανύσει x χιλιόμετρα, τότε ο πελάτης A θα διανύσει $x+3$ χιλιόμετρα.

Επομένως ο πελάτης B θα πληρώσει:

$B=1+0,6x$ και ο πελάτης A θα πληρώσει

$A=1+0,6\,(x+3)=1+0,6x+0,6\cdot 3=B+1,8$

Τελικά ο πελάτης A θα πληρώσει 1,8 ευρώ περισσότερα από τον πελάτη B.

349 Θέμα 4 – 1480

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$\mathbf{y = 60 + 0,20x}$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας A , ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β. Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ. Μία άλλη εταιρεία, η B , χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$\mathbf{y = 80 + 0,10x}$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ. Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών A και B αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος γ. .

Λύση

α. Η απόσταση είναι $x = 400$ km , οπότε θα πληρώσει $y = 60 + 0,20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$€ .

β. Το ποσό που πλήρωσε είναι $y = 150$, οπότε έχουμε

$150 = 60 + 0,2x \Leftrightarrow -0,2x = 60 - 150 \Leftrightarrow 0,2x = 90 \Leftrightarrow 2x = 900 \Leftrightarrow x = 450$ Km .

γ. Η εταιρία A είναι φθηνότερη, όταν

$$y_A < y_B \Leftrightarrow 60 + 0,20x < 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x < 20 \Leftrightarrow x < 200$$

Οπότε επιλέγουμε την A για $x \in [0, 200)$ και την B για $x > 200$.

δ. Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0,20x = 80 + 0,10x \Leftrightarrow 0,10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$.

Για $x = 200$, είναι $f(200) = 60 + 0,2 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$.

Οπότε το σημείο τομής των C_f , C_g είναι το $K(200, 100)$.

Οι συντεταγμένες του K εκφράζουν ότι για απόσταση $x = 200$ Km το κόστος και στις δύο εταιρείες είναι 100€.

350 Θέμα 4 – 1409

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β.i. , στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β. , να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Λύση

α. 'Εστω ότι ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα για x λεπτά.

Έχουμε $9\cdot 32+12\cdot x=360 \Leftrightarrow 288+12x=360 \Leftrightarrow 12x=72 \Leftrightarrow x=6$.

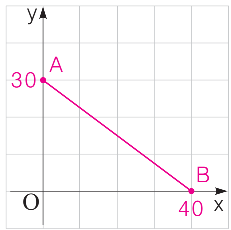
β. i. Έστω y ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα.

Έχουμε $9x+12y=360 \Leftrightarrow 12y=360-9x \Leftrightarrow y=\frac{360}{12}-\frac{9}{12}x \Leftrightarrow y=30-\frac{3}{4}x$.

Άρα $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

ii. Είναι $x\geq 0$ και $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x\geq 0 \Leftrightarrow 120-3x\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -120 \Leftrightarrow x\leq 40$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=[0,40]$.



γ. • Για $x=0$, είναι $f(0)=30$.

• $f(x)=0 \Leftrightarrow 30-\frac{3}{4}x=0 \Leftrightarrow 120-3x=0 \Leftrightarrow 3x=120 \Leftrightarrow x=40$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι το τμήμα ΑΒ με $A(0,30)$ και $B(40,0)$.

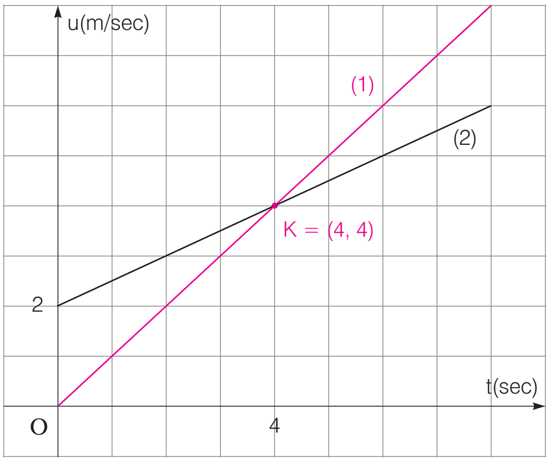
Για να κάψει ο αθλητής 360 θερμίδες το σημείο Α δείχνει ότι, αν δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά, ενώ το Β , ότι αν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 40 λεπτά.

351 Θέμα 4 – 12999

Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + \alpha \cdot t$ όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α. **Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.**

β. **Ένα όχημα A, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα B, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (Ι), (ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.**



i. **Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος A και ποια την ταχύτητα του οχήματος B;**

ii. **Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα A, B κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in (3\,,5)$.**

iii. **Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A, να σχεδιάσετε στο διπλανό διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.**

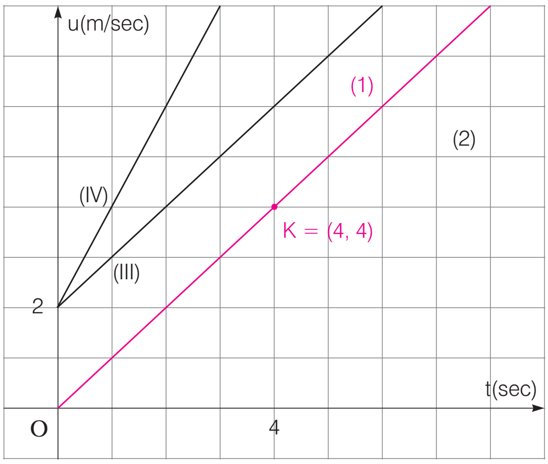
Λύση

α. Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι $t \in [0\,,+\infty)$.

β. i. Εφόσον το όχημα A ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του ταχύτητα θα είναι 0m/sec, άρα αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (Ι).

Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα B ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (ΙΙ).

ii. Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4sec το όχημα της γραμμής (ΙΙ) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή $t = 4$sec τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (Ι) κινείται ταχύτερα.



iii. Η επιτάχυνση α αποτελεί την κλίση της ευθείας (ΙΙΙ), η οποία θα περιγράφει την ταχύτητα ως προς το χρόνο του οχήματος Γ, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec. Για να έχει σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, θα πρέπει η ευθεία (ΙΙΙ) να μην τέμνεται με την ευθεία (Ι) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο $\Lambda(0\,,2)$, θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτής της ευθείας (Ι). Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο ευθείες: η (ΙΙΙ) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.