Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ (έως Θ.Bolzano)

ΘΕΜΑ Α

A_1. Να διατυπώσετε το Θ.Bolzano . **5 μονάδες**

A_2. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ **10 μονάδες**

A_3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

β) Αν για τις συναρτήσεις f,g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντα $f\circ g=g\circ f$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει πάντοτε ακριβώς μια λύση

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

ε) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to X_0}f(x)=+\infty$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_o

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\ln(x-3)+x-2$ τότε :

B_1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f . **5 μονάδες**

B_2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} **5 μονάδες**

B_3. Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε η η fog να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(4,+\infty)$. **(3+5) μονάδες**

i) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(4,+\infty)$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(g(8)-3)-\ln(g(e^{x-1})-3)>g(e^{x-1})-g(8)$

B_4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$ **7 μονάδες**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\left(f(1)-1\right)x+2f(2)$

Γ_1. Να δείξετε ότι $f(0)=f(2)$ **4 μονάδες**

Γ_2. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-2x$ και ότι η f δεν είναι ούτε 1-1 ούτε και γνήσια μονότονη . **4 μονάδες**

Γ_3. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}-2}{\eta\mu x}$ **6 μονάδες**

Γ_4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x+1\right)$ **5 μονάδες**

Γ_5. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ για $x\neq 0$ και $g(0)=\alpha-3$.

Να βρείτε τον $\alpha\in\mathbb{R}$,ώστε η g να είναι συνεχής . **6 μονάδες**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ότι η συνάρτηση g είναι **συνεχής** στο R με $g(1)<1$ και $g(3)>3$

και η συνάρτηση $f(x)=(g(x)-x)^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ_1. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(1,3)$ ώστε :

$$g(x_0)=x_0 \quad \text{και} \quad f(x_0)+g(x_0)=x_0+4$$ **8 μονάδες**

Δ_2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο. **4 μονάδες**

Δ_3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(2017x)}{x^3 f(x)}$ **8 μονάδες**

Δ_4. Να δείξετε ότι $f(7)\cdot f(107)\cdot f(1007)\cdot f(2007)>250$ **5 μονάδες**

Καλή επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 Θεωρία

A_2 Θεωρία

A_3 Σ – Λ – Λ – Σ - Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = (3,+\infty)$.
Έτσι για κάθε $x_1, x_2 \in (3,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1)
έχουμε και $x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow \ln(x_1 - 3) < \ln(x_2 - 3)$ (2) και με πρόσθεση των $(1),(2)$ παίρνουμε

$$\ln(x_1-3)+x_1 < \ln(x_2-3)+x_2 \Rightarrow \ln(x_1-3)+x_1-2 < \ln(x_2-3)+x_2-2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα , οπότε σαν γνήσια μονότονη θα είναι και $1-1$,οπότε θα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f.
B_2. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα ,τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

f και f^{-1} (αν υπάρχουν) θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$ και έτσι :

$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \ln(x-3)+x-2 = x \Leftrightarrow \ln(x-3) = 2 \Leftrightarrow x-3 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2+3$ και
$f(e^2+3) = \ln(e^2+3-3)+e^2+3-2 = \ln e^2 + e^2 + 1 = 2\ln e + e^2 + 1 = 2 + e^2 + 1 = e^2 + 3$

και το ζητούμενο σημείο τομής είναι το (e^2+3, e^2+3).

B_3. Έχουμε ότι η συνάρτηση fog να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(4,+\infty)$.

i) Υποθέτουμε τώρα η συνάρτηση ότι η g **δεν είναι γνησίως φθίνουσα** στο $(4,+\infty)$.
Τότε θα υπάρχει ένα (τουλάχιστον) ζεύγος $x_1, x_2 \in (4,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ και $g(x_1) \le g(x_2)$
Αφού η f είναι $\uparrow$ θα είναι και $f(g(x_1)) \le f(g(x_2))$,***άτοπο*** γιατί αφού η fog είναι $\downarrow$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2))$$

Κατά συνέπεια η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(4,+\infty)$.

ii) Η ανίσωση $\ln(g(8)-3)-\ln(g(e^{x-1})-3)>g(e^{x-1})-g(8)$ γράφεται ισοδύναμα

$$\ln(g(8)-3)+g(8)>\ln(g(e^{x-1})-3)+g(e^{x-1})\Leftrightarrow \ln(g(8)-3)+g(8)-2>\ln(g(e^{x-1})-3)+g(e^{x-1})-2$$

$$f\left(g(8)\right)<f\left(g(e^{x-1})\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}g(8)<g(e^{x-1})\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}8>e^{x-1}\Leftrightarrow \ln e^{x-1}<\ln 8\Leftrightarrow (x-1)\ln e<\ln 2^3$$

$$\Leftrightarrow x-1<3\ln 2\Leftrightarrow x<1+3\ln 2$$

B_4. Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$ έχουμε

- $\left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}\le\dfrac{1}{|f(x)|}\Rightarrow-\dfrac{1}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\le\dfrac{1}{|f(x)|}$ (3) και

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}=0$,αφού :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-3)\right)\overset{\binom{x-3=u}{u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}u=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Έτσι από την (3) με ΚΠ παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Θέτουμε στην σχέση (1)όπου $x=0$ και παίρνουμε :

$$f(0)=0^2+\left(f(1)-1\right)\cdot 0+2f(2)\Leftrightarrow f(0)=2f(2)$$

Θέτουμε ακόμη στην σχέση (1)όπου $x=1$ και παίρνουμε :

$f(1)=1^2+\left(f(1)-1\right)\cdot 1+2f(2)\Leftrightarrow f(2)=0$ (3).

Έτσι από τις σχέσεις $(2),(3)$ προκύπτει ότι $f(0)=f(2)=0$.

Γ_2.Η συνάρτηση μας τώρα γράφεται $f(x)=x^2+\left(f(1)-1\right)x$ και με αντικατάσταση όπου $x=2$,παίρνουμε :

$f(2)=2^2+\left(f(1)-1\right)\cdot 2\Leftrightarrow 0=4+2f(1)-2\Leftrightarrow f(1)=-1$,οπότε $f(x)=x^2-2x$.

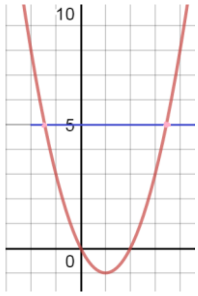
Η παραπάνω συνάρτηση δεν είναι ούτε $1-1$ ούτε και γνήσια μονότονη και αυτό γιατί :

Α τρόπος

- Παρατηρούμε ότι $0\ne 2$ και $f(0)=f(2)$ $(=0)$,οπότε δεν είναι $1-1$.

• Η f δεν είναι επίσης γν. μονότονη (Αν η f είναι γν. μονότονη ,θα είναι και $1-1$,πράγμα άτοπο)

Β τρόπος



Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$ είναι το γνωστό μας τριώνυμο και κάθε ευθεία $y=\alpha \quad (\alpha>-1)$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία.
Αυτό δηλώνει ότι η f δεν είναι ούτε 1-1 ούτε και γνήσια μονότονη .

Γ_3. Για τα όρια τώρα έχουμε :

• $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x+1}^2-1^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{1}=-4.$$

• $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)+4}-2}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{\eta\mu x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}^2-2^2}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)\eta\mu x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+4}+2}\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}=$$

Γ_4. Για το όριο όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)$ έχουμε απροσδιοριστία $\infty-\infty$και έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}+(x-1)}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \Rightarrow x>0\\ \Rightarrow |x|=x}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1-\frac{1}{x}}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

Γ_5. Είναι $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2-2x}{x}=\dfrac{x(x-2)}{x}\overset{x\neq 0}{=}x-2$ και $g(0)=\alpha-3$

Όμως αρκεί η g είναι να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε αρκεί

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}(x-2) = \alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha - 3 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$, $x \in [1,3]$ και έχουμε :

- Η h είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων .
- $h(1) = g(1) - 1 \overset{(\upsilon\pi o\theta)}{<} 0$, $h(3) = g(3) - 3 \overset{(\upsilon\pi o\theta)}{>} 0$,οπότε και $h(1)h(3) < 0$.

Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in (1,3)$ ώστε : $g(x_0) = x_0$.

Θέτουμε στην δοσμένη σχέση όπου $x = x_0$ και παίρνουμε $f(x_0) = (g(x_0) - x_0)^2 + 4 = 4$ και με πρόσθεση προκύπτει $f(x_0) + g(x_0) = x_0 + 4$

Δ_2. Έχουμε $f(x_0) = 4$ και $f(x) = (g(x) - x)^2 + 4 \geq 4$, $\forall x \in R$

Αρα: $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in R$.

δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x = x_0 \in (1,3)$ ολικό ελάχιστο.

Δ_3. Για το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu(2017x)}{x^3 f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\eta\mu(2017x)}{f(x)}$ έχουμε :

- αφού $f(x_0) = 4$ είναι ολικό ελάχιστο ,θα είναι και $f(x) \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{4}$ και

$$\left|\frac{1}{x^3} \cdot \frac{\eta\mu(2017x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right| \cdot \left|\frac{\eta\mu(2017x)}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| \cdot \left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{1}{x^3} \cdot \frac{\eta\mu(2017x)}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{4|x^3|}$$,οπότε

$$-\frac{1}{4|x^3|} \leq \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\eta\mu(2017x)}{f(x)} \leq \frac{1}{4|x^3|}$$

- όμως $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4|x^3|}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4|x^3|} = 0$ και έτσι από ΚΠ παίρνουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu(2017x)}{x^3 f(x)} = 0$

Δ_4. είναι $f(x) \geq 4$ για κάθε $x \in R$ και έτσι

$$f(7) \cdot f(107) \cdot f(1007) \cdot f(2007) \geq 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 251 > 250$$