ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ - 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$ **Μονάδες 10**

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το μέτρο του αθροίσματος δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

β) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu(2x)}{2x}=2$

γ) Κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

δ) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει

$$\left|z^2 - 4z + 3\right| + \left|2z - 6\right| = \left|z - 1\right| + 2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο ΓΤ των εικόνων $M(z)$ του μιγαδικού z, είναι κύκλος κέντρου $K(3,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

Β2. Έστω οι μιγαδικοί $w_1, w_2 \neq 0$, είναι ρίζες της εξίσωσης $w + \frac{2}{w} = 2$ με $\mathrm{Im}(w_1) > 0, \mathrm{Im}(w_2) < 0$ και z, z', z_1, z_2, z_3 είναι μιγαδικοί με εικόνες στον παραπάνω κύκλο.

i) Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $u = \dfrac{z_1 + z_2 - 6}{z_1 - z_2}$ είναι φανταστικός.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του αθροίσματος

$$S = \left|w_1 - z\right| + \left|w_2 - z'\right|$$

iii) Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{1}{z_1 - 3} + \dfrac{1}{z_2 - 3} + \dfrac{1}{z_3 - 3}\right| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} - 9\right|$

B3. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $v=\frac{1}{z}$ κινείται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.Στην συνέχεια να δείξετε ότι

$$\left|3z^2-17z+24\right|=|z|$$

Μονάδες 25 [5 +15(3x5)+5]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3e^x-x^3-3$ και

$$g(x)=e^x-x^2+1\ ,\ x\in R.$$

Α.Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R ενώ η η f είναι κυρτή στο R.

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}}{g(x)}$

Γ. i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0=0$.

ii) Να δείξετε ότι $3e^x-x^3\geq 3(x+1)$ για κάθε $x\in R$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$e^x=\frac{x^3}{3}+x+1$ έχει μοναδική ρίζα στο R.

Δ.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την παραπάνω εφαπτόμενη και την ευθεία $x=1$

Μονάδες 25 [12(5+4+3)+7(2+4)+6]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,τέτοια ώστε :

$$\left(x^2+1\right)\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt = f(x)-x^2-1 \quad \text{για κάθε } x\in R$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=e^x\left(x^2+1\right)$

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in R$ ώστε $x_0=\ln\dfrac{2015}{{x_0}^2+1}$

Αν πάρουμε ως δεδομένη την ανισότητα $e^x\geq x+1$για κάθε $x\in R$:

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g\left(x\right)=\int_1^x xf\left(t\right)dt\,,x\in R$για την οποία να εξηγήσετε ότι ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Rolle στο $\left[0,1\right]$.Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,1\right)$,ώστε να ισχύει : $4e^{\xi}>\dfrac{3-2\xi^2-\xi^4}{\xi^3+\xi}$

Δ4. i) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt<\int_0^{\int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt$,όταν $x>0$

ii) Να λύσετε στο Rτην ανίσωση $\displaystyle\int_0^{e^{x-4}}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\leq\frac{e^x}{e^3}-1$,

Μονάδες 25 [4+5+5+11(6+5)]

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες …………

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο

Α2. Σχολικό βιβλίο

Α3. **Λ – Λ- Σ – Λ - Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η δοσμένη ισότητα γράφεται :

$$\left|z^2-4z+3\right|+\left|2z-6\right|=\left|z-1\right|+2 \Leftrightarrow \left|z-1\right|\left|z-3\right|+2\left|z-3\right|=\left|z-1\right|+2$$

$$\Leftrightarrow \left|z-3\right|\left(\left|z-1\right|+2\right)-\left(\left|z-1\right|+2\right)=0 \Leftrightarrow \left(\left|z-3\right|-1\right)\left(\left|z-1\right|+2\right)=0$$

Και επειδή $\left|z-1\right|+2>0$ παίρνουμε $\left|z-3\right|-1=0 \Leftrightarrow \left|z-3\right|=1 \ (1)$

Κατά συνέπεια ο ΓΤ των εικόνων $M(z)$ του μιγαδικού z ,είναι κύκλος κέντρου $K(3,0)$ και ακτίνας $\rho=1$.

Β2. Αφού οι μιγαδικοί w_1, w_2 ,είναι ρίζες της εξίσωσης έχουμε :

$w+\dfrac{2}{w}=2 \Leftrightarrow w^2-2w+2=0 \Leftrightarrow w=1\pm i$ και επειδή $\mathrm{Im}(w_1)>0, \mathrm{Im}(w_2)<0$

θα είναι είναι : $w_1=1+i$ και $w_2=1-i$.(2)

i) Από την (1) προκύπτει ότι :

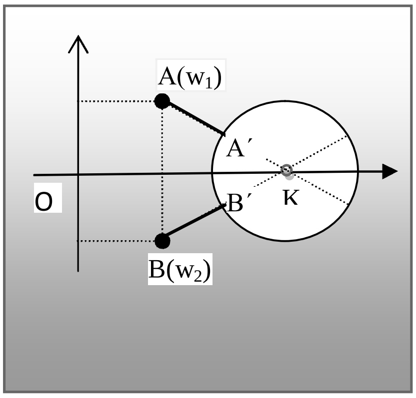
$$\left|z-3\right|^2=1 \Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)}=1 \Leftrightarrow (z-3)\left(\bar{z}-3\right)=1 \Leftrightarrow \bar{z}-3=\frac{1}{z-3} \quad (3).$$

Όμως $u=\dfrac{z_1+z_2-6}{z_1-z_2}=\dfrac{(z_1-3)+(z_2-3)}{(z_1-3)-(z_2-3)}$ οπότε :

$$\bar{u}=\overline{\frac{(z_1-3)+(z_2-3)}{(z_1-3)-(z_2-3)}}=\frac{\overline{(z_1-3)}+\overline{(z_2-3)}}{\overline{(z_1-3)}-\overline{(z_2-3)}}=\frac{\dfrac{1}{z_1-3}+\dfrac{1}{z_2-3}}{\dfrac{1}{z_1-3}-\dfrac{1}{z_2-3}}=-\frac{z_1+z_2-6}{z_1-z_2}=-u$$

δηλαδή ο u είναι φανταστικός .

ii) Από το σχήμα είναι προφανές ότι η ελάχιστη τιμή του $1^{ου}$ μέτρου είναι η $\left|w_1 - z\right| = (AA')$ και όμοια για το $2^{ο}$ μέτρο είναι η $\left|w_2 - z'\right| = (BB')$.



Έτσι :

$$S_{min} = \left|w_1 - z\right|_{min} + \left|w_2 - z'\right|_{min} = (AA') + (BB') \quad (4)$$

.

Όμως $(AK) = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$ οπότε

$(AA') = (AK) - \rho = \sqrt{5} - 1$ και $(BB') = \sqrt{5} - 1$,

οπότε $S_{min} = \left|w_1 - z\right|_{min} + \left|w_2 - z'\right|_{min}$

$= \left(\sqrt{5} - 1\right) + \left(\sqrt{5} - 1\right) = 2\left(\sqrt{5} - 1\right)$

iii) Είναι

$$\left|\frac{1}{z_1 - 3} + \frac{1}{z_2 - 3} + \frac{1}{z_3 - 3}\right| = \left|\overline{(z_1 - 3)} + \overline{(z_2 - 3)} + \overline{(z_3 - 3)}\right|\left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} - 9\right|$$

B3. Είναι $v = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{v}$

Από την σχέση $\left|z - 3\right| = 1$ παίρνουμε :

$\left|\frac{1}{v} - 3\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1 - 3v}{v}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|1 - 3v\right| = \left|v\right|$ και αντικαθιστώντας $v = x + yi$ παίρνουμε :

$$\left|1 - 3(x + yi)\right| = \left|x + yi\right| \Leftrightarrow \left|(1 - 3x)1 - 3yi\right| = \left|x + yi\right| \Leftrightarrow \sqrt{(1 - 3x)^2 1 + 9y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x)^2 + 9y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0.$$

Δηλαδή οι εικόνες του μιγαδικού $v = \frac{1}{z}$,είναι κύκλος κέντρου $\Lambda\left(\frac{3}{8}, 0\right)$

και ακτίνας $r = \frac{1}{8}$.

Είναι $\left|3z^2 - 17z + 24\right| = \left|z\right| \Leftrightarrow \left|(z - 3)(3z - 8)\right| = 2\left|z\right| \Leftrightarrow \left|z - 3\right| \cdot \left|(3z - 8)\right| = \left|z\right|$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \left|3z - 8\right| = \left|z\right| \overset{:8|z|}{\Leftrightarrow} \frac{\left|3z - 8\right|}{8\left|z\right|} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left|\frac{3z - 8}{8z}\right| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left|\frac{3}{8} - \frac{1}{z}\right| = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left|v - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{8}$$ που ισχύει

.

ΘΕΜΑ Γ

Α.Για την **μονοτονία της g**

$$\text{είναι } g'(x)=e^x-2x \text{ και } g''(x)=e^x-2 \text{ και}$$

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2=0 \Leftrightarrow x=\ln 2 \text{,επίσης}$$

$$g''(x)>0 \Leftrightarrow e^x-2>0 \Leftrightarrow x>\ln 2 \text{ και } g''(x)<0 \Leftrightarrow e^x-2<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$$

Δηλαδή

Η $g'(x)=e^x-2x$ έχει ελάχιστη τιμή την

$$g'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0 \text{ ,αφού}$$

$$e>2 \Leftrightarrow \ln e>\ln 2 \Leftrightarrow 1>\ln 2 \Leftrightarrow 1-\ln 2>0 \text{ ,οπότε}$$

$$g'(x)\geq g'_{min}(x) \Leftrightarrow g'(x)\geq g'(\ln 2) \Leftrightarrow g'(x)\geq 2(1-\ln 2)>0$$

Άρα $g'(x)>0$,δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Για την **κυρτότητα της f**

είναι $f'(x)=3e^x-3x^2$ και $f''(x)=3e^x-6x=3(e^x-2x)=3g'(x)\overset{(A)}{>}0$.

Κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R .

Β. Για το όριο έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ (1)

➯ Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$,οπότε για $x\to+\infty$ είναι $u\to 0$ και έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

➯ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-x^3-3}{e^x-x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(3-\frac{x^3}{e^x}-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{x^3}{e^x}-\frac{3}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}}$ (2)

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\underset{DH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\underset{DH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

και όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$.

Έτσι από την (2) παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{1}=3$

σχόλιο

Στο όριο μπορούμε να εργαστούμε και χωρίς να παραγοντοποιήσουμε το e^x ,χρησιμοποιώντας άμεσα τον κανόνα D L Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-x^3-3}{e^x-x^2+1}\overset{DH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3e^x-x^3-3\right)'}{\left(e^x-x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-3x^2}{e^x-2x}\overset{DH}{=}...=3$$

Γ. i) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0=0$ είναι :

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=3x\Leftrightarrow y=3x$$

ii) Αφού η f είναι κυρτή , η C_f είναι πάνω από την εφαπτόμενη σε οποιοδήποτε σημείο της ,άρα και στο $x_0=0$,οπότε :

$$f(x)\geq 3x\Leftrightarrow 3e^x-x^3-3\geq 3x\Leftrightarrow 3e^x-x^3\geq 3(x+1).$$

iii) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει φανερή ρίζα την $x_0=0$.

Σκεφτόμαστε λοιπόν μήπως έχει να κάνει με το μοναδικό κοινό σημείο C_f και εφαπτόμενης της στο $x_0=0$.

Είναι : $f(x)=3x\Leftrightarrow 3e^x-x^3-3=3x\Leftrightarrow 3e^x=x^3+3x+3\overset{:3}{\Leftrightarrow}e^x=\dfrac{x^3}{3}+x+1.$

Η εξίσωση λοιπόν είναι ισοδύναμη με την $f(x)=3x$ η οποία έχει προφανή και μοναδική ρίζα την $x_0=0$.

Δ. Η f (από Α ερώτημα) είναι κυρτή και $f(x)\geq 3x$ (από Γ/ii α).

Επίσης οι $f(x), y=3x$ είναι συνεχείς και έτσι το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E(\Omega)=\int_0^1\left(f(x)-3x\right)dx=\int_0^1\left(3e^x-x^3-3x-3\right)dx=\left[3e^x-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-3x\right]_0^1$$

$$=\left(3e^1-\frac{1^4}{4}-\frac{3\cdot1^2}{2}-3\cdot1\right)-\left(3\cdot e^0\right)=\frac{12e-31}{4}\ \text{τμ}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε στην δοσμένη σχέση όπου $x=0$ και παίρνουμε $0=f(0)-1 \Leftrightarrow f(0)=1$

$$\text{Θέτουμε: } F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt \quad (1)$$

➢ Η συνάρτηση $y=\frac{f(t)}{1+t^2}$ είναι συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών ,οπότε και η συνάρτηση $F(x)$ ως παράγουσα είναι παραγωγίσιμη .

➢ Η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt=\frac{f(x)-x^2-1}{x^2+1} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt=\frac{f(x)-\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt=\frac{f(x)}{x^2+1}-1$$

$\Leftrightarrow F(x)=F'(x)-1 \Leftrightarrow F(x)-F'(x)=-1$ και πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} έχουμε :

$$e^{-x}F(x)-e^{-x}F'(x)=-e^{-x} \Leftrightarrow F'(x)e^{-x}-e^{-x}F(x)=e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}F(x)\right)'=\left(-e^{-x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}F(x)=-e^{-x}+c \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} F(x)=ce^x-1$$

Όμως $F(0)=ce^0-1=0 \Leftrightarrow c=1$,οπότε $F(x)=e^x-1$ και από την (1) έχουμε

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt=e^x-1 \Rightarrow \left(\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right)'=\left(e^x-1\right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{1+x^2}=e^x \Rightarrow f(x)=e^x\left(1+x^2\right)$$

Ο παραπάνω τύπος επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες και έτσι $f(x)=e^x\left(1+x^2\right) \quad (2)$

2ος τρόπος (χωρίς την χρήση βοηθητικής συνάρτησης**)**

Από την δοσμένη σχέση προκύπτει : $f(x)=x^2+1+\left(x^2+1\right)\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$,όπου με την γνωστή διαδικασία (…) **αποδεικνύουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη**.

Έτσι παραγωγίζοντας την $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt=\frac{f(x)}{x^2+1}-1$ έχουμε :

$$\left(\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right)'=\left(\frac{f(x)}{x^2+1}-1\right)' \Rightarrow \frac{f(t)}{1+t^2}=\left(\frac{f(t)}{1+t^2}\right)'$$

και από την γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει

$$\frac{f(x)}{1+x^2}=ce^x \Rightarrow f(x)=c\left(1+x^2\right)e^x \Rightarrow ... \Rightarrow f(x)=e^x\left(1+x^2\right)$$

Δ2. Το ζητούμενο μοναδικό υπαρξιακό μας παραπέμπει σε ΘΕΤ (από ΣΤ) και μονοτονία .

Όμως η f είναι φανερά παραγωγίσιμη και έχουμε :

➭ ΜΟΝΟΤΟΝΊΑ

$$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(1+x^2\right)+e^x\left(1+x^2\right)'=e^x\left(1+x^2\right)+2x\left(1+x^2\right)e^x=e^x\left(x^2+2x+1\right)$$

Οπότε : $f'(x)=e^x\left(x+1\right)^2\geq 0$

x	-∞	-1	+∞
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-1\right]$ και $\left[-1,+\infty\right)$ και επειδή είναι συνεχής στο R ,άρα και στο $x=-1$ θα είναι γν. αύξουσα στο R .

➭ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Η f ως συνεχής και γν. αύξουσα στο R θα έχει σύνολο τιμών της μορφής

$$f\left(A\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)$$

Όμως :

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1+x^2\right)=+\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}e^x\left(1+x^2\right)\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{e^{-x}}\overset{DH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\overset{DH}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f\left(A\right)=\left(0\ ,+\infty\right)$

Όμως η f είναι συνεχής που σημαίνει ότι κάθε τιμή του $\Sigma T=\left(0\ ,+\infty\right)$ είναι και τιμή της .

Αφού όμως το $2015\in\left(0\ ,+\infty\right)$,τότε από ΘΕΤ προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in R$ (και λόγω μονοτονίας μοναδικό) ώστε

$$f\left(x_0\right)=2015\Leftrightarrow e^{x_0}\left(1+{x_0}^2\right)=2015\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_0}\left(1+{x_0}^2\right)\right)=\ln 2015$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{x_0}+\ln\left(1+{x_0}^2\right)=\ln 2015\Leftrightarrow x_0=\ln 2015-\ln\left(1+{x_0}^2\right)\Leftrightarrow x_0=\ln\frac{2015}{1+{x_0}^2}$$

Δ3. Είναι $g\left(x\right)=\int_1^x xf\left(t\right)dt\Leftrightarrow g\left(x\right)=x\int_1^x f\left(t\right)dt$.

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ,οπότε η συνάρτηση $y=\int_1^x f\left(t\right)dt$ είναι παράγουσα ,άρα και παραγωγίσιμη .

➭ Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$,ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων

$y=x$ και $y=\int_1^x f(t)dt$.

➯ Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y=x$ και $y=\int_1^x f(t)dt$.

➯ Είναι $g(0)=g(1)=0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Rolle στο $[0,1]$.

Θα υπάρχει λοιπόν ένα τουλάχιστο $\xi\in(0,1)$, ώστε να ισχύει : $g'(\xi)=0$.

Όμως :

$$g'(x)=\left(x\int_1^x f(t)dt\right)'=\int_1^x f(t)dt+xf(x)=\int_1^x f(t)dt+xe^x(1+x^2), \text{άρα και}$$

$$g'(\xi)=\int_1^\xi f(t)dt+\xi e^\xi(1+\xi^2)=0\Leftrightarrow -\int_\xi^1 f(t)dt+\xi e^\xi(1+\xi^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \xi e^\xi(1+\xi^2)=\int_\xi^1 f(t)dt \quad (\sigma)$$

Όμως από την γνωστή ανισότητα $e^x\ge x+1>x$, $x\in R$ προκύπτει :

$$f(t)=e^t(1+t^2)>t(1+t^2)\Leftrightarrow f(t)>t^3+t, \text{οπότε και } \int_\xi^1 f(t)dt>\int_\xi^1 (t^3+t)dt.$$

Όμως $\int_\xi^1 (t^3+t)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]_\xi^1=\left(\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}\right)-\left(\frac{\xi^4}{4}+\frac{\xi^2}{2}\right)=\frac{3-\xi^4-2\xi^2}{4}$

και η παραπάνω ανισότητα γράφεται :

$\int_\xi^1 f(t)dt>\int_\xi^1 (t^3+t)dt\Leftrightarrow \int_\xi^1 f(t)dt>\frac{3-\xi^4-2\xi^2}{4}$ και λόγω της σχέσης (σ) παίρνουμε :

$$\xi e^\xi(1+\xi^2)>\frac{3-\xi^4-2\xi^2}{4}\overset{:\xi(1+\xi^2)>0}{\Leftrightarrow} e^\xi>\frac{3-\xi^4-2\xi^2}{4\xi(1+\xi^2)}\Leftrightarrow 4e^\xi>\frac{3-2\xi^2-\xi^4}{\xi^3+\xi}$$

Δ4. Για το i) ερώτημα εργαζόμαστε με 2 τρόπους

1^{ος} τρόπος

Είναι $\int_0^{\int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt<\int_0^{\int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\Leftrightarrow \int_0^{\int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt-\int_0^{\int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}\frac{f(t)}{1+t^2}dt>0$

$$\Leftrightarrow \int_{\int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt}^{\int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt} \frac{f(t)}{1+t^2}dt > 0 \text{ και αφού } \frac{f(t)}{1+t^2} = \frac{e^t\left(1+t^2\right)}{1+t^2} = e^t > 0 \text{ ,αρκεί :}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt > \int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt - \int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt > 0 \Leftrightarrow \int_{\eta\mu x}^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > \eta\mu x \text{ που ισχύει ,γιατί : } e^x \geq x+1 > x \geq \eta\mu x \Leftrightarrow e^x > \eta\mu x$$

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt = e^x - 1$ με $F'(x) = e^x > 0$,οπότε η F είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ζητούμενη ανισότητα ισοδύναμα γράφεται :

$$F\left(\int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right) < F\left(\int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right) \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} \int_0^{\eta\mu x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt < \int_0^{e^x}\frac{f(t)}{1+t^2}dt \Leftrightarrow F(\eta\mu x) < F\left(e^x\right)$$

$$\overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x < e^x \text{ που ισχύει σύμφωνα με τα παραπάνω .}$$

ii) Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$\int_0^{e^{x-4}}\frac{f(t)}{1+t^2}dt \leq \frac{e^x}{e^3} - 1 \Leftrightarrow F\left(e^{x-4}\right) \leq e^{x-3} - 1 \Leftrightarrow F\left(e^{x-4}\right) \leq F\left(x-3\right) \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{x-4} \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow e^{x-4} \leq \left(x-4\right)+1 \quad \left(3\right)$$

Λόγω όμως της δοσμένης σχέσης $e^x \geq x+1$,η $\left(3\right)$ γράφεται :

$$e^{x-4} = \left(x-4\right)+1 \Leftrightarrow e^{x-4} - x + 3 = 0 \quad \left(4\right)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h\left(x\right) = e^{x-4} - x + 3$

είναι $h\left(4\right) = 0$ (προφανής λύση) και $h'\left(x\right) = e^{x-4} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	-∞	4	+∞
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	↘		↗

Το πρόσημο της $h'\left(x\right)$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα ,από τον οποίο προκύπτει επίσης ότι $h\left(4\right) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο .

Κατά συνέπεια η $\left(4\right) \Leftrightarrow h\left(x\right) = 0 = h\left(0\right) \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική λύση