ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ - Α

A_1 : Θεωρία

A_2 : —//—

A_3 : $\alpha \to \Sigma$ $\quad \beta \to \Lambda$ $\quad \gamma \to \Sigma$ $\quad \delta \to \Lambda$ $\quad \varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ - Β

B_1 : Πρέπει :
$$\left.\begin{array}{l} x^2 \geq 0 \text{ και } x^2 \geq 0 \text{ και } x \geq 0 \\ x-\sqrt{5} \neq 0 \text{ και } x+\sqrt{5} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \neq \sqrt{5}, -\sqrt{5} \end{array}$$

άρα $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\sqrt{5}\}$

B_2 : Έστω $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\sqrt{5}\}$

(i) Είναι : $\Pi(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x^3)^3} - 5\sqrt[3]{x^3}}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})} = \dfrac{x^3-5x}{x^2-5} = \dfrac{x\cancel{(x^2-5)}}{\cancel{x^2-5}}$

άρα $\Pi(x) = x$ (1)

(ii) Η εξίσωση $|\Pi(x^2-3x+2)| = x^2-3x+2$ λόγω της (1) γράφεται

$$|x^2-3x+2| = x^2-3x+2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \quad (2)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου (2)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
τριώνυμο		+	0	−	0	+	

Οπότε η (2) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

ΘΕΜΑ-Γ για το τριώνυμο $x^2+\lambda x-(\lambda^2+1)$ (1)
έχουμε

(Γ1) για $\lambda=1$ είναι $x^2+1\cdot x-(1^2+1)=x^2+x-2$

και η ανίσωση γράφεται:

$x^2+x-2<0$ (2) και έχουμε ανίσωση β' βαθμού

Ρίζες (...) $-2, 1$

πρόσημο τριωνύμου

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
ανίσωση		$+$	0	$-$	0	$+$	

και η (2) $\iff x\in(-2,1)$

(Γ2) Η εξίσωση $x(x+\lambda)=\lambda^2+1$ γράφεται:

$$x^2+\lambda x=\lambda^2+1 \iff x^2+\lambda x-(\lambda^2+1)=0 \quad (3)$$

Είναι: $\Delta=\lambda^2+4\cdot 1(\lambda^2+1)=5\lambda^2+4>0$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

δηλαδή η εξίσωση (3) έχει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$
2 ρίζες άνισες

(Γ3) Για τις ρίζες της εξίσωσης (3), χρησιμοποιώντας τους τύπους Vietta, έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\lambda}{1}, \quad P=x_1x_2=-\frac{\lambda^2+1}{1} \quad \text{άρα} \quad x_1+x_2=-\lambda, \quad x_1x_2=-(\lambda^2+1) \quad (4)$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2} \overset{(4)}{\iff} \frac{-\lambda}{-(\lambda^2+1)}=-\frac{1}{2} \iff \frac{\lambda}{\lambda^2+1}=\frac{1}{-2}$$

$$\iff \lambda^2+1=-2\lambda \iff \lambda^2+2\lambda+1=0 \iff (\lambda+1)^2=0 \iff \lambda=-1$$