Γ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ

4.1 δες αντίστοιχη θεωρία

4.2

Α) ναι

Β) όχι

4.3 δες αντίστοιχη θεωρία

4.4 δες αντίστοιχη θεωρία

4.5

$A \to \Lambda$ $\quad B \to \Sigma$ $\quad \Gamma \to \Sigma$ $\quad \Delta \to \Sigma$

4. 6

$\lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$

$\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)dx\right)' = f(x)$

$\left(\int_{\sigma(x)}^{\alpha} f(x)dx\right)' = -f(\sigma(x))\sigma'(x)$

$\left(\int_{\alpha}^{\sigma(x)} f(g(x))dx\right)' = f(g(\sigma(x))\sigma'(x)$

4.6 -4,8 θεωρία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4.9

Οι δοσμένοι τύποι συναρτήσεων φυσικά δεν προδιαθέτουν για υπολογισμό παραγουσών.

Απλοποιούμε λοιπόν με πράξεις τους δοσμένους τύπους και έχουμε :

α. Είναι $f(x)=\left(x^2+3\right)(x-1)^2=\left(x^2+3\right)\left(x^2-2x+1\right)=x^4-2x^3+4x^2-6x+3$

Οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις , $F(x)=e^x+\eta\mu x+c$, όπου $c\in R$.

β. Είναι $f(x)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\ln(x-1)}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)(x-1)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}=\frac{1}{x}-x^{-2}+x^{-4}+x^{-5}$

Οπότε οι παράγουσες της f στο $(1,+\infty)$ είναι οι συναρτήσεις

$,F(x)=\ln|x|-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+c=\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+c$, όπου $c\in R$.

γ. Είναι $f(x)=\left(x^3+1\right)(x-2)^2+100^{\log(x-1)}=\left(x^3+1\right)\left(x^2-4x+4\right)+10^{\log(x-1)^2}\Rightarrow$

$$f(x)=\left(x^3+1\right)\left(x^2-4x+4\right)+(x-1)^2=x^5-4x^4+4x^3+2x^2-6x+5$$

Οπότε οι παράγουσες της f στο $(1,+\infty)$ είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\frac{x^{5+1}}{5+1}-4\frac{x^{4+1}}{4+1}+4\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}-6\frac{x^{1+1}}{1+1}+5x+c\Rightarrow$$

$F(x)=\frac{1}{6}x^6-\frac{4}{5}x^5+x^4+\frac{2}{3}x^3-3x^2+5x+c$, όπου $c\in R$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.10

α. Μετασχηματίζουμε τον τύπο της συνάρησης και έχουμε :

$f(x)=(x+1)e^x=xe^x+e^x=x\left(e^x\right)'+x'e^x=\left(xe^x\right)'$,

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x)=xe^x+c$,όπου $c\in R$.

β. Όμοια έχουμε

$$f(x)=x(2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=$$

$$\left(x^2\right)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=\left(x^2\eta\mu x\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x)=x^2ημx+c$,όπου $c\in R$.

γ. Όμοια έχουμε

$$f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x)=\frac{\ln x}{x}+c$,όπου $c\in R$.

δ. Όμοια έχουμε

$$f(x)=-\frac{1+e^x}{(x+e^x)^2}=-\frac{(x+e^x)'}{(x+e^x)^2}=\left(\frac{1}{x+e^x}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x)=x^2ημx+c$,όπου $c\in R$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.11

α. έχουμε

$$f(x)=(2x+3)e^{x^2+3x-1}=(x^2+3x-1)'e^{x^2+3x-1}=\left(e^{x^2+3x-1}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x)=e^{x^2+3x-1}+c$,όπου $c\in R$.

β. έχουμε $f(x)=5^{x^2+π}\cdot x=(x^2+π)'5^{x^2+π}=\frac{1}{2}\left(5^{x^2+π}\right)'$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις $F(x)=5^{x^2+π}+c$,όπου $c\in R$.

γ. έχουμε

$$f(x)=e^{x^2+x+1+\ln(2x+1)}=e^{\ln(2x+1)}e^{x^2+x+1}=(2x+1)e^{x^2+x+1}=(x^2+x+1)'e^{x^2+x+1}=\left(e^{x^2+x+1}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσει $F(x)=e^{x^2+x+1}+c$,όπου $c\in R$.

δ. έχουμε

$$f(x)=10^{x^3+3x+7+\log(x^2+1)}=10^{\log(x^2+1)}\cdot 10^{x^3+3x+7}=(x^2+1)10^{x^3+3x+7}=$$

$$\frac{1}{3}(x^3+3x+7)'10^{x^3+3x+7}=\frac{1}{3}\left(10^{x^3+3x+7}\right)'$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\frac{1}{3}10^{x^3+3x+7}+c\text{ ,όπου } c\in R\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.12

α.*Κάνουμε σχήμα Horner για το πολυώνυμο του αριθμητή και έχουμε*

1	-1	-1	-2	2
↓	2	2	2	
1	1	1	0	

οπότε η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-2}=x^2+x+1$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{1}{3}\ x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c\overset{x>0}{=}\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-4\ln x-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+c$$

β.Κάνουμε σχήμα Horner για το πολυώνυμο του παρονομαστή και έχουμε

1	1	1	-3	1
↓	1	2	3	
1	2	3	0	

οπότε η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\ln\left|x^2+2x+3\right|+c=\ln(x^2+2x+3)+c$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.13

α.Κάνουμε την Ευκλείδια διαίρεση $(x^2+1):(x^2-3x+2)$

x^2	$+0x$	$+1$	x^2-3x+2
$-x^2$	$+3x$	-2	$\Pi(x)=1$
$\Upsilon(x)$	$+3x$	-1	

οπότε η ρητή συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\frac{1\cdot(x^2-3x+2)+3x-1}{x^2-3x+2}=1+\frac{3x-1}{x^2-3x+2}\quad (1)$$

Όμως

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2}=\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}\qquad (2)$$

Από την (2) προκύπτει $A(x-2)+B(x-1)=3x-1$

Για χ=2 η (2) $\Leftrightarrow$ B=5

Για χ=1 η (2) $\Leftrightarrow$ $-A=2\Leftrightarrow A=-2$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει

$$f(x)=1+\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)}=1+\frac{-2}{x-1}+\frac{5}{x-2}$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=x-2\ln|x-1|+5\ln|x-2|+c=x-2\ln(-x+1)+5\ln(-x+2)+c$$

β.Κάνουμε την Ευκλείδια διαίρεση $(x^3+x+1):(x^2+2x)$

x^3	$+0x^2$	$+x$	$+1$	x^2+2x
$-x^3$	$-2x^2$	$-2x$		$\Pi(x)=x-2$
	$-2x^2$	$-1x$	$+1$	
	$+2x^2$	$+4x$		
	$\Upsilon(x)$	$+3x$	$+1$	

οπότε η ρητή συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+2x}=\frac{(x^2+2x)(x-2)+3x+1}{x^2+2x}=x-2+\frac{3x+1}{x^2+2x}\quad(1)$$

Όμως

$$\frac{3x+1}{x^2+2x}=\frac{3x+1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}\qquad(2)$$

Από την (2) προκύπτει $A(x+2)+Bx=3x+1$

Για χ=-2 η (2) $\Leftrightarrow$ -2B=-5 $\Leftrightarrow B=5/2$

Για χ=0 η (2) $\Leftrightarrow$ $2A=1\Leftrightarrow A=1/2$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει

$$f(x)=x-2+\frac{3x+1}{x(x+2)}=x-2+\frac{1/2}{x}+\frac{5/2}{x+2}$$

οπότε οι παράγουσες της f είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{2}\ln|x+2|+c=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{5}{2}\ln(x+2)+c$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.14

●Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ οπότε

● η συνάρτηση $F(x)=\eta\mu x+c_1$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα $[-\pi,0)$.
η συνάρτηση $F(x)=e^x+c_2$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα $(0,\pi]$.
●για να είναι τώρα η η συνάρτηση $F(x)$ είναι παράγουσα της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$,αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0=0$.
Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)\Leftrightarrow 0+c_1=1+c_2$,οπότε αν θέσουμε $c_2=c$ παίρνουμε $c_1=1+c\quad(1)$.
Κατά συνέπεια οι παράγουσες της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\begin{cases}\eta\mu x+c_1 &, x\le 0\\ e^x+c_2 &, x>0\end{cases}\overset{(1)}{\Rightarrow}F(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1+c &, x\le 0\\ e^x+c &, x>0\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.15

α) $f(0)=2,\ f(2)=-6$

β) i)Θ Bolzano για την f στο $[0,2]$ *ii)ΘΜΤ για την f στο* $[0,2]$

ΑΣΚΗΣΗ 4.16

Επειδή $f'(x)=2x-3$, έχουμε διαδοχικά:

$f'(x)=\left(x^2-3x\right)' \Leftrightarrow f(x)=x^2-3x+c,\ c\in R$

Για να διέρχεται η *f* από το σημείο $A(1,2)$ πρέπει και αρκεί $f(1)=2$ ή, ισοδύναμα, $1^2-3\cdot 1+c=2$, δηλαδή $c=4$. Επομένως, $f(x)=x^2-3x+4$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.17

● Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$x\left(f'(x)-f(x)\right)=f(x)\Rightarrow xf'(x)-xf(x)=f(x)\Rightarrow xf'(x)-x'f(x)=xf(x)\overset{:x^2}{\Rightarrow}$

$\dfrac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=ce^x\Rightarrow f(x)=cxe^x\quad(1)$

Για $x=1$,η (1) γράφεται $f(1)=ce\Rightarrow e^2=ce\Rightarrow c=e$,οπότε από σχέση (1) προκύπτει ότι $f(x)=exe^x\Rightarrow f(x)=xe^{x+1}\quad(2)$

● Για $x=0$ έχουμε (f συνεχής) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(xe^x\right)=0\quad(3)$

Κατά συνέπεια από $(2),(3)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}xe^{x+1} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.18

$f(x)=2+e^{-\varepsilon\varphi x}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.19

$f(x)=x^2+cx$

ΑΣΚΗΣΗ 4.20

$f(x)=\sqrt{2x}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.21

$f(x)=\dfrac{e^{2x-1}-1}{e^{2x-1}+1}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.22

$f(x)=\frac{e^x}{x}+1$ με $x>0$

ΑΣΚΗΣΗ 4.23

α) $f(x)=3x^2+4x$ β) $f(x)=3x-\frac{4}{x}+c$

ΑΣΚΗΣΗ 4.24

α)Δείξτε ότι $g'(x)=0$ β) $f(x)=e^{x-1}$,$x\in R$ β) $G(x)=e\ln\left(e^x+e\right)+c$

ΑΣΚΗΣΗ 4.25

Για $x>0$, η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\left(xf(x)\right)'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}\Rightarrow ....\Rightarrow f(x)=\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.26

i) *Έχουμε*

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2-4x+4}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x-2)^2}dx=\int_{-1}^{0}(x-2)^{-2}dx=\int_{-1}^{0}\left[\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}\right]'dx=-\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-2}\right)'dx=$$

$$=-\left[\frac{1}{x-2}\right]_{-1}^{0}=-\left\{\frac{1}{-2}-\frac{1}{-3}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

i i) *Έχουμε*

$$\int_{0}^{1}\frac{4}{x^3+3x^2+3x+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{4}{(x+1)^3}dx=4\int_{0}^{1}(x+1)^{-3}dx=4\int_{0}^{1}\left[\frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1}\right]'dx=$$

$$=-2\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]'dx=-2\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{0}^{1}=-2\left\{\frac{1}{4}-1\right\}=-\frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.27

i) *Έχουμε*

$$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{1}^{e}(\ln x)'\ln x dx=\int_{1}^{e}\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)'dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{1}^{e}=\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{2}\left\{\ln^2 e-\ln^2 1\right\}=\frac{1}{2}$$

i) *Έχουμε*

$$\int_1^e \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln x^{1/2}}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)' \ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)' dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{1}{4}\left[\ln^2 x\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\ln^2 e - \ln^2 1\right\} = \frac{1}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.28

Η δοσμένη σχέση με διαίρεση ($f(x) \neq 0$) γράφεται

$$f'(x) = 2013 f^2(x) \overset{:f(x)}{\Rightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = 2013 f(x) \text{ ,οπότε}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx = 2013\int_\alpha^\beta f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{2013}\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{2013}\int_\alpha^\beta \left(\ln f(x)\right)' dx$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{2013}\left[\ln f(x)\right]_\alpha^\beta = \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{2013} = \frac{\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}}{2013} \overset{\upsilon\pi}{=} \frac{\ln 2013}{2013}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.29

Έχουμε

$$I = \int_{-2}^0 \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}dx = \int_{-2}^0 \frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x-1\right)^2}dx = \int_{-2}^0 \left(x+1\right)^2 dx = \int_{-2}^0 \left[\frac{\left(x+1\right)^3}{3}\right]' dx$$

$$= \left[\frac{\left(x+1\right)^3}{3}\right]_{-2}^0 = \frac{1}{3}\left[\left(x+1\right)^3\right]_{-2}^0 = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.30

Έχουμε

$$I = \int_2^3 \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1}dx = \int_2^3 \frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^{-2} dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left[\frac{\left(x^2-1\right)^{-2+1}}{-2+1}\right]' dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^3 \left[\frac{1}{x^2-1}\right]' dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1}\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.31

Κάνουμε σχήμα Horner για το πολυώνυμο του παρονομαστή και έχουμε

1	1	1	-3	1
↓	1	2	3	
1	2	3	0	

οπότε η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\frac{x+1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}$$

Οπότε $I=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}dx=\left[\ln|x^2+2x+3|\right]_{-1}^{0}=\ln\frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.32

Από τη σχέση $|\eta\mu x|\le|x|$ προκύπτει ότι $\eta\mu x\le x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,οπότε

$$\int_0^{\pi/2}|x-\eta\mu x|\,dx=\int_0^{\pi/2}(x-\eta\mu x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}+\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.33

α) Η συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ,οπότε

$f'(x)=e^x-1$ με $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1=e^0\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$ x=0

Είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$

x	**-∞**	**0**	**+∞**
f ΄(x)	**–**	**0**	**+**
f(x)	↘	**ο.ε.** **f(0) = 0**	↗

Το πρόσημο της f' φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ,από τον οποίο και προκύπτει ότι

● Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

●Έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

β) Είναι $f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$.

γ) Είναι $\int_{-1}^{1}\left|e^x-x-1\right|$ dx=$\int_{-1}^{1}\left(e^x-x-1\right)$dx=$\left[e^x-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1}=\frac{e^2-e-2}{e}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.34

α) Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=e^x$
είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι $g''(x)=e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$
Συνεπώς η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος της βρίσκεται κάτω από το γράφημα της g
Είναι, $g(0)=1, g'(0)=1$ αφού $g'(x)=e^x$ και άρα η εφαπτομένη στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y=x+1$.
Από τα παραπάνω έχουμε $e^x\ge x+1\ \forall x\in\mathbb{R}(1)$
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$
Η αρχική ανισότητα για $x=x_0$ δίνει
$-x_0+2>e^{1-x_0}\Rightarrow e^{1-x_0}-(1-x_0)<1$ το οποίο αντίκειται στην (1)
Έτσι, $f(x)\ne 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο
Από την αρχική είναι $f(0)+2>e\Rightarrow f(0)>e-2>0$

άρα $f(x)>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

β) Αφού $f(x)>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει

$$\int_0^1\left|f(x)\right|dx=\int_0^1 f(x)dx \overset{\text{υποθ}}{=} 4 \qquad (2)$$

Η παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται
$f(x)-e^{1-x}+x^2-2x+5=\left(f(x)-x+2-e^{1-x}\right)+\left(x^2-x+3\right)>0$ γιατί

- $f(x)-x+2-e^{1-x}>0$ λόγω υπόθεσης
- $x^2-x+3>0$ γιατί $\Delta=-11<0$

κατά συνέπεια

$$\int_0^1\left|f(x)-e^{1-x}+x^2-2x+5\right|dx=\int_0^1\left(f(x)-e^{1-x}+x^2-2x+5\right)dx=$$

$$=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 e^{1-x}dx+\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 2x+5\int_0^1 1dx \overset{\text{υποθ}}{=} 4+\left[e^{1-x}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[x^2\right]_0^1+5\left[x\right]_0^1=$$

$$=4+(1-e)+\left(\frac{1}{3}-0\right)-(1-0)+5(1-0)=\frac{28}{3}-e$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.25

● Η συνάρτηση $g(x)=\left|\frac{x^4-8x}{x-2}\right|+\left|\frac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right|$ είναι φανερά συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

● Έχουμε

➤ $$\left|\frac{x^4-8x}{x-2}\right|=\left|\frac{x\left(x^3-8\right)}{x-2}\right|=\left|\frac{x(x-2)\left(x^2-2x+4\right)}{x-2}\right|=|x|\left|x^2-2x+4\right|$$

$$=|x|\underbrace{\left|(x-1)^2+3\right|}_{\text{.............}(+)\text{..............}}=x\left[(x-1)^2+3\right]=x\left(x^2-2x+4\right)=x^3-2x^2+4x$$

➤ $$\left|\frac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right|=\left|\frac{x^5\left(x^2+1\right)}{x^3\left(x^2+1\right)}\right|=\left|x^2\right|=x^2$$

Άρα η συνάρτηση $g(x)$

$$g(x)=\left|\frac{x^4-8x}{x-2}\right|+\left|\frac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right|=x^3-2x^2+4x+x^2=x^3-x^2+4x$$

●Είναι $\int_{1/2}^{3/2}\left(\left|\frac{x^4-8x}{x-2}\right|+\left|\frac{x^7+x^5}{x^5+x^3}\right|\right)dx=\int_{1/2}^{3/2}\left(x^3-x^2+4x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{1/2}^{3/2}=......$

ΑΣΚΗΣΗ 4.36

● Η συνάρτηση $g(x)=\left|4-\left|-x^2+2x-1\right|\right|-\left|\left|x^2+4\right|+4x\right|$ είναι φανερά συνεχής στο R ,κατά συνέπεια και στο $[0,1]$.

● Παρατηρούμε ότι

➤ $-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le 0$, οπότε

$4-\left|-x^2+2x-1\right|=4+\left|-(x-1)^2\right|=4+(x-1)^2>0$ και κατά συνέπεια

$$\left|4-\left|-x^2+2x-1\right|\right|=\left|4+(x-1)^2\right|=4+(x-1)^2=x^2-2x+5$$

➤ $x^2+4>0$, οπότε $\left|\left|x^2+4\right|+4x\right|=\left|x^2+4x+4\right|=\left|(x+2)^2\right|=(x+2)^2=x^2+4x+4$.

Άρα η συνάρτηση $g(x)$

γράφεται $g(x)=\left(x^2-2x+5\right)-\left(x^2+4x+4\right)=-6x+1$

●Είναι $\int_0^2\left(\left|4-\left|-x^2+2x-1\right|\right|-\left|\left|x^2+4\right|+4x\right|\right)dx=\int_0^2(-6x+1)\,dx=\left[-3x^2+x\right]_0^2=-10$

ΑΣΚΗΣΗ 4.37

α) Κάνουμε την *Ευκλείδια* διαίρεση $\left(x^2-x+2\right):\left(x^2-3x+2\right)$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -\ 2x & +\ 2 & x^2\ -\ 3x\ +\ 2 \\ \cline{4-4} -x^2 & +\ 3x & -2 & 1 \\ & & x & \end{array}$$

και έχουμε

$x^2\ -\ 2x\ +\ 2=1\cdot\left(x^2\ -\ 3x\ +\ 2\right)+x$, οπότε

$$I_1=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1\cdot\left(x^2-3x+2\right)+x}{x^2-3x+2}dx=\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{x}{x^2-3x+2}\right)dx=$$

$$= \int_{-1}^{0} 1dx + \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx \quad (1). \text{ Όμως}$$

$$\bullet = \int_{-1}^{0} 1dx = [x]_{-1}^{0} = 1$$

$$\bullet \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{(x-1)(x-2)} dx = \ldots = \int_{-1}^{0} \left[-\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right] = \ldots = \ln \frac{8}{9}$$

β) Κάνουμε την Ευκλείδια διαίρεση $(x^2+1):(x^2-3x+2)$

x^2	$+0x$	$+1$	$x^2 - 3x + 2$
$-x^2$	$+3x$	-2	$\Pi(x) = 1$
$Y(x)$	$+3x$	-1	

οπότε η ρητή συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = \frac{1\cdot(x^2-3x+2)+3x-1}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-1}{x^2-3x+2} \quad (1)$$

Όμως

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \qquad (2)$$

Από την (2) προκύπτει $A(x-2)+B(x-1) = 3x-1 \Leftrightarrow (A+B)x + (-2A-B) = 3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=5 \end{cases}$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει

$$f(x) = 1 + \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = 1 + \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-2} \text{ , οπότε}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} dx = \int_{-1}^{0} \left(1 + \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx = \int_{-1}^{0} 1dx - 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1} dx + 5\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= [x]_{-1}^{0} - 2\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} + 5\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0} = \ldots..$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.38

Έχουμε

$$\int_1^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{e} \ln x \cdot (2\sqrt{x})'\,dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e} - \int_1^{e} 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e} - 2\int_1^{e}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e} - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e} = 2\sqrt{e^2}\,\ln e^2 - 2\sqrt{1}\,\ln 1 - 4(\sqrt{e^2}-\sqrt{1})$$

$$= 2e\cdot 2\ln e - 0 - 4e + 4 = 4e - 4e + 4 = 4$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.39

Έχουμε

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'f'(x)dx=$$

$$=\left[xf(x)\right]_0^1-\left(\left[\frac{x^2}{2}f'(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f''(x)dx\right)=\left[xf(x)\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}f'(x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{6}{x^3+1}dx \quad (1)$$

Όμως

► $\left[xf(x)\right]_0^1=1f(1)-0f(0)=0$

► $\left[\frac{x^2}{2}f'(x)\right]_0^1=\frac{1^2}{2}f'(1)-\frac{0^2}{2}f'(0)=0$

► $\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{6}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{3x^2}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx=\left[\ln\left|x^3+1\right|\right]_0^1=\ln 2$

Οπότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι $I=\ln 2$

ΑΣΚΗΣΗ 4.40

► Είναι $\int_0^{\pi} t\,\text{ημ}t\,dt=\ldots=\pi$,οπότε

► $I=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}t\,\text{ημ}t\,dt\right)x\,\text{συν}(\pi x)\,dx=\int_0^{2\pi}\pi x\,\text{συν}(\pi x)\,dx=\int_0^{2\pi}x\left(\text{ημ}(\pi x)\right)'dx=$

$$=\left[x\eta\mu(\pi x)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}x'\eta\mu(\pi x)\,dx=\left[x\eta\mu(\pi x)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\eta\mu(\pi x)\,dx=$$

$$=\left[x\eta\mu(\pi x)\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi}\left[x\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right]_0^{2\pi}=\left(2\pi\eta\mu\left(2\pi^2\right)-0\eta\mu 0\right)+\frac{1}{\pi}\left(2\pi\sigma\upsilon\nu\left(2\pi^2\right)-0\sigma\upsilon\nu 0\right)=$$

$$=2\pi\eta\mu\left(2\pi^2\right)+2\sigma\upsilon\nu\left(2\pi^2\right)$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.41</u>

α) Έχουμε ότι

●Το πεδίο ορισμου της $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ είναι $A_f=(0,+\infty)$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και είναι

$$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

Είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow -\dfrac{\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow -\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow x<1$

x	**0**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	
			$f(1)=1$ **ΟΜ**		

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παραπάνω πίνακα ,από τον οποίο προκύπτει ότι

η συνάρτηση f :

Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Έχει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$,όμως σαν συνεχής στο $x=1$,θα είναι και ολικό μέγιστο.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$

Οπότε η f ,σαν συνεχής θα έχει Σ.Τ. το διάστημα $(-\infty,1]$

●Το πεδίο ορισμου της $g(x)$ είναι $A_g = R$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R και είναι

$$g'(x)=\left(e^{x-3}-x+2\right)'=e^{x-3}-1 \quad \boldsymbol{\mu\varepsilon} \quad g'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$$

x	$-\infty$	**3**	$+\infty$
$g'(x)$	**-**	0	**+**
$g(x)$	**2**	**1**	

$g(3)=0$
ΟΕ

Το πρόσημο της g' φαίνεται στον παραπάνω πίνακα ,από τον οποίο προκύπτει ότι η συνάρτηση g:
Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$
Έχει τοπικό ελάχιστο το $g(3)=0$,όμως σαν συνεχής στο $x=1$,θα είναι και ολικό ελάχιστο.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-3}-x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x-3}}{x}-1+\dfrac{2}{x}\right)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-3}}{x}\overset{DH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^{x-3}\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3}=+\infty$.
Οπότε η g ,σαν συνεχής θα έχει Σ.Τ. το διάστημα $[0,+\infty)$.
β) Η παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται :

$$\Pi = e^{x-3}-\frac{1+\ln x}{x}+x^2-3x+4=\left(e^{x-3}-x+2\right)+\left(1-\frac{1+\ln x}{x}\right)+\left(x^2-2x+1\right)\Rightarrow$$

$$\Pi=\left(e^{x-3}-x+2\right)+\left(1-\frac{1+\ln x}{x}\right)+(x-1)^2 \quad (1)$$

¨Ομως

● $e^{x-3}-x+2 \overset{(a)}{\geq} 0$

● $\dfrac{1+\ln x}{x}\overset{(a)}{\leq}1 \overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -\dfrac{1+\ln x}{x}\geq -1 \Rightarrow 1-\dfrac{1+\ln x}{x}\geq 0$

● $(x-1)^2\geq 0$

με πρόσθεση κατά μέλη (λόγω (1)) παίρνουμε ότι

Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I=\int_1^3 x^2\left|e^{x-3}-\frac{1+\ln x}{x}+x^2-3x+4\right|dx=\int_1^3 x^2\left(e^{x-3}-\frac{1+\ln x}{x}+x^2-3x+4\right)dx\Rightarrow$$

$$I=\int_1^3 x^2e^{x-3}dx-\int_1^3 x\ln x+\int_1^3\left(x^4-3x^3+4x^2-x\right)dx=\ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.42

● θέτουμε $\ln x = u$

● διαφορίζουμε $d(\ln x) = du \Rightarrow (\ln x)' \, dx = du \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$

● νέα άκρα $u_1 = \ln x\big|_{x=1} = \ln 1 = 0$ και $u_2 = \ln x\big|_{x=e} = \ln e = 1$

● έχουμε $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.43

● θέτουμε $\ln x = u$

● διαφορίζουμε $d(\ln x) = du \Rightarrow (\ln x)' \, dx = du \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$

● νέα άκρα

$u_1 = \ln x\big|_{x=e^2} = \ln e^2 = 2\ln e = 2$ και $u_2 = \ln x\big|_{x=e^3} = \ln e^3 = 3\ln e = 3$

έχουμε . $I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \int_2^3 \frac{1}{u \ln u} du$ (1) .Συνεχίζουμε με νέα αντικατάσταση και

θέτουμε $\ln u = t$,οπότε $d(\ln u) = dt \Rightarrow (\ln u)' \, du = dt \Rightarrow \frac{1}{u} du = dt$ και όμοια έχουμε

$$(1) \Rightarrow I = \int_2^3 \frac{1}{u \ln u} du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{u \ln u} du = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t|\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2).$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.44

Το ολοκλήρωμα γράφεται $I = \int_0^9 \sqrt{x + x\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)} dx = \int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}} \sqrt{x} dx \quad (1)$

● θέτουμε $\sqrt{1+\sqrt{x}} = u$ οπότε $u^2 = \sqrt{1+\sqrt{x}}^2 \Rightarrow u^2 = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = u^2 - 1 \quad (2)$

● διαφορίζουμε τη ν σχέση (2) και παίρνουμε

$$du^2 = d\left(1+\sqrt{x}\right) \Rightarrow 2udu = \left(1+\sqrt{x}\right)' dx \Rightarrow 2udu = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2udu = \frac{1}{2\left(u^2-1\right)} dx$$

οπότε $dx = 4u\left(u^2-1\right)du$

● νέα άκρα

$$u_1 = \sqrt{1+\sqrt{x}}\Big|_{x=0} = 1 \qquad \text{και} \qquad u_1 = \sqrt{1+\sqrt{x}}\Big|_{x=9} = 2$$

από (1) έχουμε

$$I = \int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\sqrt{x}dx = \int_1^2 u\left(u^2-1\right)4u\left(u^2-1\right)du = \int_1^2 4u^2\left(u^2-1\right)^2 du =$$

$$= \int_1^2 \left(4u^6 - 8u^4 + 4u^2\right)du = 4\int_1^2 u^6 du - 8\int_1^2 u^4 du + 4\int_1^2 u^2 du =$$

$$4\left[\frac{u^7}{7}\right]_1^9 - 8\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^9 + 4\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^9 = \ldots = \frac{396}{105}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.45

● Η συνάρτηση f ίναι πολυωνυμική και κατά συνέπεια είναι παραγωγίσιμη στο R .

Έχουμε

$$f'(x) = \left(x^5 + x^3 + x + 1\right)' = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \ .$$

Κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα στο R ,άρα είναι και $1-1$,οπότε είναι και αννιστρέψιμη.

●Είναι

$$\int_1^5 f^{-1}(x)dx = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x\left(x^5 + x^3 + x + 1\right)dx = \int_0^1 \left(x^6 + x^4 + x^2 + x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1^7}{7} + \frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^7}{7} + \frac{0^5}{5} + \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right) = \ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.46

Θέτουμε $I = \int_\alpha^\beta xf(x)dx \overset{(\text{υπο}\vartheta)}{\Rightarrow} I = \int_\alpha^\beta xf(\alpha + \beta - x)dx$

● Κάνουμε αντικατάσταση $\alpha + \beta - x = u \Rightarrow x = \alpha + \beta - u$

● Διαφορίζουμε και είναι

$$d(\alpha + \beta - x) = du \Rightarrow (\alpha + \beta - x)' dx = du \Rightarrow -dx = du \Rightarrow dx = -du$$

● νέα άκρα $u_1 = \alpha + \beta - x\big|_{x=\alpha} = \beta$ και $u_2 = \alpha + \beta - x\big|_{x=\beta} = \alpha$

είναι

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} xf(\alpha + \beta - x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - u) f(u)(-du) = -\int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - u) f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - u) f(u)du$$

$$= (\alpha + \beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du - \int_{\alpha}^{\beta} uf(u)du = (\alpha + \beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du - I \Rightarrow 2I = (\alpha + \beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(u)du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = (\alpha + \beta)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \Rightarrow I = \frac{\alpha + \beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.47</u>

● Θέτουμε $\int_{1}^{2} e^{xf(x)-1}dx = c \quad (1)$

● Η δοσμένη σχέση γράφεται $xf(x) = c \Rightarrow f(x) = \frac{c}{x} \qquad (2) \quad \boldsymbol{(} x > 0 \boldsymbol{)}$

● Αντικαθιστούμε στην σχέση (1) την τιμή της f

$$\int_{1}^{2} e^{x\frac{c}{x}-1}dx = c \Rightarrow \int_{1}^{2} e^{c-1}dx = c \Rightarrow e^{c-1}(2-1) = c \Rightarrow e^{c-1} = c \quad (3)$$

● Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^{x-1} - x \quad , x \in R$

$$g'(x) = e^{x-1} - 1 \ \boldsymbol{\mu\varepsilon} \ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	**-∞**	**1**	**+∞**
$g'(x)$	**–**	**0**	**+**
$g(x)$	↘	ο.ε. $g(1) = 0$	↗

κατά τα γνωστά προκύπτει ότι η $x = 1$,είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Οπότε από την σχέση (3) έχουμε

$e^{c-1} = c \Leftrightarrow c = 1$ *και από (2) προκύπτει ότι* $\quad f(x) = \frac{c}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

ΑΣΚΗΣΗ 4.48

Θέτουμε $x=\alpha+\beta-t$ όπότε

$$\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\int_\beta^\alpha(\alpha+\beta-t)f(\alpha+\beta-t)(-dt)=\int_\alpha^\beta(\alpha+\beta)f(t)dt-\int_\alpha^\beta tf(t)dt=\int_\alpha^\beta(\alpha+\beta)f(x)dx-\int_\alpha^\beta xf(x)dx$$

Άρα $\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\int_\beta^\beta f(x)dx$

Έχουμε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx$ (1)

Θέτουμε $x=\alpha+\beta-u$ οπότε

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx=\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\alpha f(\alpha+\beta-u)(-du)=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(u)du$$

Η σχέση (1) γράφεται

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx=(\alpha+\beta)\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.49

(α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\lambda x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\lambda\right)}{x}=1+\lambda\overset{\upsilon\pi}{=}1\Rightarrow\lambda=0$

(β)Είναι $I=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\dfrac{1}{2}\ln 2$

ΑΣΚΗΣΗ 4.50

(α) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+(\alpha-3)x}{x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\alpha-3\right)}{x}=1+\alpha-3\overset{\upsilon\pi}{=}2\Rightarrow\alpha=4$$

(β) η ευθεία $\psi=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x)$ όταν

- ❖ $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\upsilon\pi}{=}2$ και

❖ $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]\overset{\infty-\infty}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=0$$

Άρα η ευθεία ψ=2χ είναι πλάγια ασύμτωτη της συνάρτησης $f(x)$ στο $+\infty$

(γ)Είναι $I=\int_0^1\frac{2x}{\left(f(x)-x\right)^2}dx\ \ \int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\ln 2$

ΑΣΚΗΣΗ 4.51

α) Θέτουμε όπου x το 2004-x και από το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε f(x)=668-x .

β) Είναι g(x)=$\dfrac{\mathbf{668-x}}{\boldsymbol{ln}\,\mathbf{x}}$, x$\in$(0 , 1)$\cup$(1 ,+∞) .

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$=…=0 και $\lim\limits_{x\to+\infty}$(g(x)-0·x)=…= -∞ $\notin\Re$, η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες .Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}$g(x)=0$\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to1^+}$g(x)= +∞ , $\lim\limits_{x\to1^-}$g(x)= -∞ οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x =1 .

γ) Είναι h(x)=x^2(668-x)= -x^3+668x^2 , x$\in\Re$ και $\int_\alpha^\beta \mathbf{xh''(x)dx}$ =

=$[xh'(x)]_\alpha^\beta$- $\int_\alpha^\beta \mathbf{(x)'h'(x)dx}$ =βh΄(β)- αh΄(α)-$[h(x)]_\alpha^\beta$= βh΄(β)- αh΄(α)-h(β)+h(α) .

Για να ισχύει η ισότητα $\int_\alpha^\beta \mathbf{xh''(x)dx}$ =h(α)-h(β) ,αρκεί βh΄(β)- αh΄(α)=0 , για κατάλληλες τιμές των α , β .Έχουμε h΄(x)=0$\Leftrightarrow$-3x^2+1336x=0$\Leftrightarrow$x=0 ή x=$\dfrac{\mathbf{1336}}{\mathbf{3}}$.

Επιλέγοντας α=0 και β=$\dfrac{\mathbf{1336}}{\mathbf{3}}$ παίρνουμε το ζητούμενο .

ΑΣΚΗΣΗ 4.52

● Αν $F_1(x)=\int_0^x \frac{\eta\mu t}{t^2-4}dt$,τότε έχουμε

→ Η συνάρτηση $f(t)=\frac{\eta\mu t}{t^2-4}$ ορίζεται για κάθε $t\in R$ με

$t^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+2)\neq 0 \Leftrightarrow t\neq \pm 2$

Κατά συνέπεια $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$,στο οποίο η f είναι συνεχής.

→ Όμως το $\alpha=0$ ανήκει στο υποδιάστημα $(-2,2)$ του A_f ,οπότε $A_{F_1}=(-2,2)$.

● Αν $F_2(x)=\int_0^{x^2-6}\sqrt{9-u^2}du$,τότε έχουμε

→ Η συνάρτηση $f(u)=\sqrt{9-u^2}$ ορίζεται για τα κάθε $u\in R$ με

$9-u^2\geq 0 \Leftrightarrow (3-u)(3+u)\geq 0 \Leftrightarrow u\in[-3,3]$

Κατά συνέπεια $A_f=[-3,3]$,στο οποίο η f είναι συνεχής.

→ Η συνάρτηση $g(x)=x^2-6$ ορίζεται για κάθε $x\in R$,οπότε $A_g=R$.

→ Όμως το $\alpha=0$ ανήκει στο $A_f=[-3,3]$,οπότε απαιτούμε να ισχύει :

$$\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in[-3,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x^2-6\in[-3,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ -3\leq x^2-6\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ 3\leq x^2\leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}\leq x\leq 3$$

,

οπότε $A_{F_2}=\left[\sqrt{3},3\right]$.

●Η συνάρτηση $F(x)$ είναι άθροισμα των συναρτήσεων $F_1(x),F_2(x)$,οπότε

$$A_F=A_{F_1}\cap A_{F_2}=(-2,2)\cap\left[\sqrt{3},3\right]=\left[\sqrt{3}.2\right)$$

● Είναι

$$F'(x)=\left(\int_0^x\frac{\eta\mu t}{t^2-4}dt\right)'+\left(\int_0^{x^2-4}\sqrt{9-u^2}du\right)'=\frac{\eta\mu x}{x^2-4}+\sqrt{9-\left(x^2-4\right)^2}\left(x^2-4\right)'\Rightarrow$$

$$F'(x)=\frac{\eta\mu x}{x^2-4}+2x\sqrt{9-\left(x^2-4\right)^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.53

Η σχέση (1) για $x\geq 1$,γράφεται ισοδύναμα

$$x\int_1^x f(t)dt = f(x) - x \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt = \frac{f(x)-x}{x}$$ και αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη

έχουμε $f(t) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \Leftrightarrow xf'(x) = \left(x^2+1\right)f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x^2+1$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε : $\displaystyle\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_1^x \frac{t^2+1}{t}dt \quad (2)$

● Από την (1) για $x=1$ προκύπτει $0 = f(1)-1 \Rightarrow f(1)=1$.

● Από την (2) για κάθε $x \geq 1$ έχουμε

$$\left[\ln f(t)\right]_1^x = \int_1^x \frac{t^2+1}{t}dt \Rightarrow \ln f(x) - \ln f(1) = \int_1^x \left(t+\frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x - \frac{1}{2}\ ,$$

οπότε $\quad f(x) = xe^{\frac{x^2-1}{2}}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.54</u>

Έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{x^2+2x+1}$ είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$

Οι παράγουσες της f ,δίνονται από τον τύπο $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + c$

Όμως $F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)dt + c \overset{(\text{υποθ})}{=} 2 \Rightarrow c = 2$.

Κατά συνέπεια είναι $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 2 \quad (1)$. Όμως

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t \cdot e^t}{t^2+2t+1}dt = \int_0^x \frac{te^x + e^t - e^t}{(t+1)^2}dt = \int_0^x \frac{e^t}{t+1}dt - \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2}dt =$$

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}\left(e^t\right)' dt - \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2}dt = \left[\frac{e^t}{t+1}\right]_0^x - \int_0^x e^t\left(\frac{1}{t+1}\right)' dt - \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2}dt =$$

$$\left[\frac{e^t}{t+1}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2}dt - \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2}dt = \left[\frac{e^t}{t+1}\right]_0^x = \frac{e^x}{x+1} - \frac{e^0}{0+1} = \frac{e^x}{x+1} - 1$$

Οπότε από την σχέση (1) προκύπτει

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + 2 = \frac{e^x}{x+1} - 1 + 2 \Rightarrow F(x) = \frac{e^x}{x+1} + 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.55

α) Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \text{ οπότε } A_f = (1, +\infty)$$

β) Φανερά η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\alpha = e \in R$,οπότε

οι παράγουσες της f ,δίνονται από τον τύπο $F(x) = \int_e^x f(t)\,dt + c$

Αλλά $F(e) = \int_e^e f(t)\,dt + c \overset{(\upsilon\pi o\vartheta)}{=} 2 \Rightarrow c = 2$,οπότε $F(x) = \int_e^x f(t)\,dt + 2$ (1)

Όμως $\int_e^x f(t)\,dt = \int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t \ln t}\,dt$ (2)

- θέτουμε $\ln t = u$
- διαφορίζουμε $d(\ln t) = du \Rightarrow (\ln t)'\,dt = du \Rightarrow \frac{1}{t}dt = du$
- νέα άκρα
  $u_1 = \ln t\big|_{t=e} = \ln e = 1$ και $u_2 = \ln t\big|_{t=x} = \ln x$

Οπότε από την σχέση (2) προκύπτει

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t \ln t}\,dt = \int_1^{\ln x} \frac{\ln u}{u}\,du = \int_1^{\ln x} (\ln u)' \ln u\,du = \int_1^{\ln x} \left(\frac{1}{2}\ln^2 u\right)' du = \frac{1}{2}\left[\ln^2 u\right]_1^{\ln x}$$

και από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το σύνολο των παραγουσών είναι

$$F(x) = \int_e^x f(t)\,dt + 2 = \frac{1}{2}\left[\ln^2 u\right]_1^{\ln x} + 2 = \frac{1}{2}\ln^2(\ln x) + 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.56

Θέτοντας στη δοθείσα σχέση όπου x το 0, προκύπτει πως $g(0) = g(1)$.Όμως, η g παραγωγίσιμη στο [0,1] ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων. Συνεπώς, από Rolle, υπάρχει $r \in (0,1)$ ώστε $g'(r) = 0 \Rightarrow \alpha e^{f(r)} = 0$

Επειδή, $e^{f(x)} > 0, \forall x \in R$,ισχύει πως $\alpha = 0$

Άρα , $\forall x \in R : g(x) = g(1)$

Β ΛΥΣΗ

Με την αντικατάσταση $x = 1$ στην δοθείσα έχουμε πως

$$g(1) = g(1) + \alpha \int_0^1 e^{f(t)}\,dt \Leftrightarrow \alpha \int_0^1 e^{f(t)}\,dt = 0$$

κι επειδή $e^{f(t)}>0 \Rightarrow \int_0^1 e^{f(t)}dt>0$ τότε έχουμε πως $α\cdot 0=0 \Leftrightarrow α=0$

Οπότε βάζοντας $α=0$ στην δοθείσα έχουμε $g(x)=g(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς η g είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.57</u>

● θέτουμε $t-x=u \Rightarrow x=t-u$ (με t σταθερά)

● διαφορίζουμε $d(t-x)=du \Rightarrow (t-x)'\,dx=du \Rightarrow -dx=du \Rightarrow dx=-du$

● νέα άκρα

$u_1=t-x\big|_{x=0}=t$ και $u_2=t-x\big|_{x=t}=0$

έχουμε

$$G(t)=\int_0^t \frac{f(x)\cdot f'(t-x)}{\left[f(x)+f(t-x)\right]^2}\cdot dx=\int_t^0 \frac{f(t-u)\cdot f'(u)}{\left[f(t-u)+f(u)\right]^2}\cdot(-du)=\int_0^t \frac{f(t-u)\cdot f'(u)}{\left[f(t-u)+f(u)\right]^2}\cdot du$$

Αυτην και την αρχικη τις προσθετουμε και:

$$2G(t)=\int_0^t \frac{f(x)\cdot f'(t-x)}{\left[f(x)+f(t-x)\right]^2}\cdot dx+\int_0^t \frac{f(t-u)\cdot f'(u)}{\left[f(t-u)+f(u)\right]^2}\cdot du=\int_0^t \frac{f(u)\cdot f'(t-u)+f(t-u)\cdot f'(u)}{\left[f(t-u)+f(u)\right]^2}\cdot du$$

$$=\int_0^t \left(\frac{f(u)}{f(t-u)+f(u)}\right)'\cdot du \quad \text{δηλαδή}$$

$$2G(t)=\left[\frac{f(u)}{f(t-u)+f(u)}\right]_0^t=\frac{f(t)}{f(t-t)+f(t)}-\frac{f(0)}{f(t-0)+f(0)}=\frac{f(t)-f(0)}{f(0)+f(t)} \quad \text{άρα}$$

$$G(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(t)-f(0)}{f(0)+f(t)} \quad \text{με } t\in R \qquad (1)$$

• Από την (1) προκύπτει φανερά ότι η $G(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$G'(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{f(t)-f(0)}{f(0)+f(t)}\right)'=\frac{f'(t)f(0)}{\left(f(t)+f(0)\right)^2} \quad \text{με } t\in R \quad (2)$$

• Από την (2) για $x=0$ προκύπτει

$$G'(0)=\frac{f'(0)f(0)}{\left(f(0)+f(0)\right)^2}=\frac{f'(0)f(0)}{4f^2(0)}=\frac{f'(0)}{4f(0)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.58

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $G(x)=e^{-x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Έχουμε $G(\alpha)=G(\beta)=0$

Για τη συνάρτηση G ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Κατά συνέπεια υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in(\alpha,\beta)$ ώστε $G'(x_0)=0$ (1)

Όμως $G'(x)=(e^{-x})'\int_{\alpha}^{x} f(t)dt + e^{-x}(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt)' = -e^{-x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt + e^{-x}f(x)$ οπότε

$G'(x_0)=-e^{-x_0}\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt + e^{-x_0}f(x_0)$.Κατά συνέπεια η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$-e^{-x_0}\left(\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt - f(x_0)\right)=0 \Rightarrow f(x_0)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.59

α) Για κάθε $t\in R$ είναι $\frac{t+1}{t^2+1}>\frac{t}{t^2+1}$ οπότε για $x>0$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt > \int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt > \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt \quad (1)$$

Όμως

- $\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
- $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=+\infty$

Οπότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt=+\infty$

β) Λόγω του α) ερωτήματος, στο ζητούμενο όριο έχουμε απροσδιοριστία $\frac{+\infty}{+\infty}$,οπότε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(t)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.60

Είναι :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-\text{συν}x}\int_0^x f(t)dt\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt}{1-\text{συν}x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\int_0^x f(t)dt\right)'}{(1-\text{συν}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}{\text{ημ}x}=$$

$$\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(t)dt+xf(x)\right)'}{(\text{ημ}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+xf'(x)}{\text{συν}x}=2f(0)+0f'(0)=2f(0).$$

Οπότε λόγω της υπόθεσης είναι $2f(0)=4\Rightarrow f(0)=2$

ΑΣΚΗΣΗ 4.61

Η εξίσωση της ευθείας γράφεται $y = x - 2 \quad\Leftrightarrow\quad g(x) = x - 2$

Οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x) \quad\Leftrightarrow\quad 4-x^2 = x-2 \;\Leftrightarrow\; x^2+x-6=0 \;\Leftrightarrow\; x=-3$

ή $x = 2$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[-3,\ 2]$

Η διαφορά $f(x) - g(x) = 4 - x^2 - x + 2 = - x^2 - x + 6$

Πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$E = \int_{-3}^{2}(f(x)-g(x))dx = \int_{-3}^{2}(4-x^2-x+2)dx = \int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx =$$

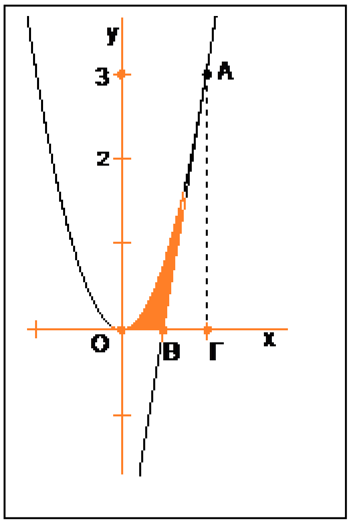
$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{2}=\left(-\frac{8}{3}-2+12\right)-\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-18\right) = \frac{125}{6}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.62</u>

i) $f'(x) = 6x$, $f(1) = 3$ και $f'(1) = 6$

Άρα η εφαπτομένη στο Α είναι : $y-3 = 6(x-1) \iff y = 6x-3$

ii) Αναζητούμε το εμβαδό του μικτογράμμου τριγώνου ΟΒΑ, όπου το Β είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των x.



Για $y = 0$, η $y = 6x-3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, άρα $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Φέρνουμε $ΑΓ \perp x'x$, οπότε $Γ(1, 0)$

Ζητούμενο εμβαδόν :

Ε = (Μικτόγραμμο ΟΓΑ) – (Τρίγωνο ΒΓΑ)

$$= \int_0^1 |f(x)|dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(x)|dx$$

$$= \int_0^1 |3x^2|dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 |6x-3|dx$$

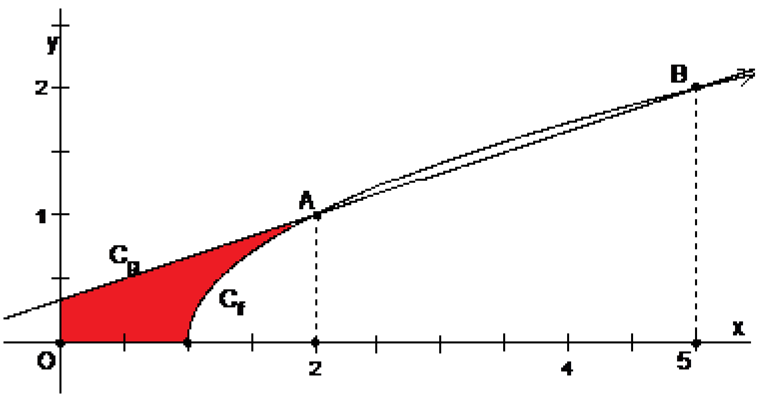
$$= \int_0^1 3x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x-3)dx = \left[x^3\right]_0^1 - \left[3x^2-3x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= (1-0) - \left[3.1^2 - 3.1 - \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2}\right]\right] = 1 - \left[0 - \left[3.\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}\right]\right] =$$

$$1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.63</u>

Κοινό πεδίο ορισμού είναι το $[1, +\infty)$



Κοινά σημεία των C_f, C_g : f(x) = g(x) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $x-1 = \frac{(x+1)^2}{9}$

$\Leftrightarrow$ $9(x-1) = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow$ $9x - 9 = x^2 + 2x + 1$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - 7x + 10 = 0$ $\Leftrightarrow$ x = 2 ή x = 5

Πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$: $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

$\sqrt{x-1} \geq \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} \geq x+1$

$9(x-1) \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow 9x - 9 \geq x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$

$$E = \int_{1}^{\frac{5}{2}} |f(x) - g(x)|dx = \int_2^5 (f(x) - g(x))dx = \int_2^5 (\sqrt{x-1} - \frac{x+1}{3})dx =$$

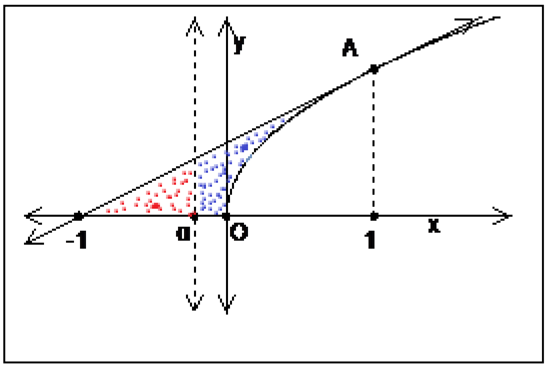
$$\int_2^5 \sqrt{x-1}dx - \int_2^5 \frac{x+1}{3}dx = \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int_2^5 (x+1)dx =$$

$$\left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_2^5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^5 =$$

$$\frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1) - \frac{1}{3}(\frac{25}{2} + 5 - \frac{4}{2} - 2) = \frac{1}{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.64

i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ $f'(1) = \frac{1}{2}$



Εξίσωση της εφαπτόμενης στο A(1, 1) :

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Η εφαπτόμενη στο Α τέμνει τον άξονα των x στο σημείο με τετμημένη την λύση της εξίσωσης $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = -1$

Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίζεται από τον άξονα των y σε δύο μέρη.

$$E = \int_{-1}^{0}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})dx + \int_{0}^{1}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x})dx = \quad =$$

$$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} \quad = \quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3} \quad = \quad \frac{1}{3}$$

ii) Εξετάζουμε αν υπάρχει τιμή του α με $-1 \leq \alpha \leq 0$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{-1}^{\alpha}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})dx = \frac{E}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{\alpha} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$3\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{-3-\sqrt{6}}{3} \quad ή \quad \alpha = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$$

Από αυτές, στο διάστημα $[-1\ ,\ 0]$ ανήκει η $\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

Άρα η ευθεία $x = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ χωρίζει το χωρίο σε δύο ισεμβαδικά τμήματα.

Αναζητώντας ευθεία $x = \alpha$ με $0 \leq \alpha \leq 1$ φθάνουμε σε αδύνατη εξίσωση, άρα δεν υπάρχει τέτοια ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ 4.65

α. $f(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow -3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και 2 είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα των x . Το πρόσημο της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f		−	0	+	0	−	

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-3x^2+6x)dx=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=4\,τ.μ.$$

β. $f(x)=(6-3\alpha)x \Leftrightarrow -3x^2+3\alpha x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\alpha$

Δηλαδή οι αριθμοί 0 και α είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία (ε). Το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-(6-3\alpha)x=-3x^2+3\alpha x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x		0		α	
$-3x^2+3\alpha x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από την C_f και την (ε) είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^{\alpha}\left|f(x)-(6-3\alpha)x\right|dx=\int_0^{\alpha}\left(-3x^2+3\alpha x\right)dx=\left[-x^3+\frac{3\alpha x^2}{2}\right]_0^{\alpha}=\frac{\alpha^3}{2}$$

Επομένως η (ε) χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν ισχύει :

$$E(\Omega_1)=\frac{1}{2}E(\Omega)\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{2}=\frac{1}{2}4\Leftrightarrow\alpha=\sqrt[3]{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.66

α. Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[1,\lambda]$ και επίσης $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[1,\lambda]$.

Επομένως: $E(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)dx=\int_1^{\lambda}9x^2\ell nx dx=\int_1^{\lambda}(3x^3)'\ell nx dx=$

$$=\left[3x^3\ell nx\right]_1^{\lambda}-\int_1^{\lambda}3x^3\frac{1}{x}dx=3\lambda^3\ell n\lambda-\int_1^{\lambda}3x^2dx=$$

$$=3\lambda^3\ell n\lambda-\left[x^3\right]_1^{\lambda}=3\lambda^3\ell n\lambda-\lambda^3+1$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(\lambda)=E(\lambda)-17=3\lambda^3\ell n\lambda-\lambda^3-16,\quad \lambda\in[1,e]$

Για τη g παρατηρούμε ότι :

• g συνεχής στο $[1,e]$,

• $g(1)g(e)=(-1-16)\left(3e^3-e^3-16\right)=-17\left(2e^3-16\right)<0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$ (1)

Όμως για κάθε $\lambda \in (1,e)$, $g'(\lambda)=9\lambda^2\ell n\lambda+3\lambda^3\frac{1}{\lambda}-3\lambda^2=9\lambda^2\ell n\lambda>0$

Άρα $g\uparrow(1,e)$ (2). Από τις (1) και (2)συμπεραίνουμε ότι:

υπάρχει μοναδικό $\lambda\in(1,e): g(\lambda)=0 \Leftrightarrow E(\lambda)-17=0 \Leftrightarrow E(\lambda)=17$

ΑΣΚΗΣΗ 4.67

α. Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,π] (αφού είναι συνεχής στο [0,π]) και συνεπώς είναι “ 1-1 ” δηλαδή αντιστρέψιμη.

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , έπεται ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (αν βέβαια υπάρχουν) θα βρίσκονται επί της ευθείας με εξίσωση $y = x$, ουσιαστικά δηλαδή θα προέρχονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=x$ στο [0,π].

Έτσι λοιπόν: $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$

(αφού $x\in[0,\pi]$) και επομένως, λόγω συμμετρίας των διαγραμμάτων των f και f^{-1} , ως προς την ευθεία $y = x$, το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$E=2\int_0^\pi|f(x)-x|dx=2\int_0^\pi|\eta\mu x|dx=2\int_0^\pi\eta\mu x dx \text{ (αφού για κάθε } x\in[0,\pi],\ \eta\mu x\geq 0)$$

$$=2(-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0)=4$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.68

Για την f έχουμε ότι είναι συνεχής με θετικές τιμές στο διάστημα [1,3] κατά συνέπεια για το εμβαδόν Ε του ζητούμενου χωρίου θα είναι :

$$E=\int_1^3 x^2e^xdx=\int_1^3 x^2\left(e^x\right)'dx=\left[x^2e^x\right]_1^3-\int_1^3\left(x^2\right)'e^xdx=3^2e^3-e-\int_1^3 2xe^xdx=$$

$$=9e^3-e-2\int_1^3 x\left(e^x\right)'dx=9e^3-e-2\left[xe^x\right]_1^3+2\int_1^3(x)'e^xdx=9e^3-e-6e^3+2e+2\int_1^3 e^xdx=$$

$$=3e^3+e+2\left[e^x\right]_1^3=3e^3+e+2e^3-2e=5e^3-e.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.69

α) Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το x+2006 : f(x+2006)+f(x+1003)=0 (1)
Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το x+1003 : f(x+1003)+f(x)=0 (2)
Από (1) και (2) : f(x+2006)=f(x) .

β) $\int_1^{2005} f(x+2007)dx = \int_1^{2005} f(x+1+2006)dx = \int_1^{2005} f(x+1)dx \overset{x+1=u}{=} \int_2^{2006} f(u)du$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.70

Έστω $\phi(\chi) = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \int_\alpha^x g(t)dt + \int_x^\beta h(t)dt$

$$\phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \int_\alpha^\beta h(t)dt = \int_\alpha^\beta [f(t) - h(t)]dt < 0$$

$$\phi(\beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_\alpha^\beta [f(t) - g(t)]dt > 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ *ώστε*

$$\phi(\xi) = 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\xi g(t)gt + \int_\xi^\beta h(t)dt.$$

Η $\phi'(\chi) = -g(\chi) + h(\chi) > 0$. *Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η λύση αυτή είναι μοναδική.*

ΑΣΚΗΣΗ 4.71

α) Επειδή η συνάρτηση h(x) - g(x) είναι συνεχής στο [α , β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε x$\in$[α , β] είναι h(x) > g(x)$\Leftrightarrow$ h(x) - g(x) > 0 έχουμε :

$$\int_\alpha^\beta (h(x) - g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx \ .$$

β)

i) Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ και παίρνουμε :

$$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} \ (1),\ x \in \Re.$$

ii) Για κάθε x > 0 έχουμε $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} < f(x) - f(0) < xf'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < f'(x)$ (2) . Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την (2) .

Η f είναι συνεχής στο [0 , x] και παραγωγίσιμη στο (0 , x) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Όμως $0 < \xi < x \Rightarrow$

$f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$ (3) , αφού από την (1) για κάθε $x \in \Re$:

$f''(x) = \dfrac{e^{-f(x)}f'(x)}{(1+e^{-f(x)})^2} > 0$ ($f'(x) > 0$, από την (1)) , οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα . Όμως $f'(0) = \dfrac{1}{1+e^{-f(0)}} = \dfrac{1}{1+e^{0}} = \dfrac{1}{2}$. Έτσι από την (3) προκύπτει η (2) .

iii) Η f είναι συνεχής στο [0 , 1] (ως παραγωγίσιμη στο $\Re$) και για κάθε $x \in [0\ ,\ 1]$ είναι $f(x) \geq 0$ (f(0) = 0 και για κάθε x > 0 είναι $0 < \dfrac{x}{2} < f(x)$) . Επομένως

$$E = \int_0^1 f(x)dx\ .$$

Επειδή το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) εξακολουθεί να ισχύει και όταν $h(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha\ ,\ \beta]$ με το = να μην ισχύει παντού στο [α , β] (η απόδειξη όμοια) θα έχουμε :

$\dfrac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x)$ (για κάθε $x \in [0\ ,\ 1]$ με το = να ισχύει μόνο για x = 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow [\frac{x^2}{4}]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)'f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\frac{x^2}{4}]_0^1 < E \\ E < [xf(x)]_0^1 - E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < E \\ 2E < f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < E \\ E < \frac{1}{2}f(1) \end{cases}$$

Άρα $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2}f(1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.72

α) Έχουμε $\int_0^1 \ln^2 f(x)dx + \int_0^1 x^4 dx = 2\int_0^1 x^2 \ln f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 [\ln f(x) - x^2]^2 dx = 0$

$\Leftrightarrow$ $\ln f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

β) $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)-f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}dx =$

$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)}dx \overset{1-x=u}{=} 1 + \int_1^0 \frac{f(u)}{f(u)+f(1-u)}du = 1 - I$.

Άρα $2I = 1 \Leftrightarrow I = 0{,}5$

ΑΣΚΗΣΗ 4.73

i) Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x xf(u)du - \int_0^x uf(u)du \quad (1)$

Είναι $g'(x) = \left(x\int_0^x f(u)du\right)' - \left(\int_0^x uf(u)du\right)' = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα. Έχω $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \quad (2)$

Η (1) λόγω της (2) δίνει $\int_0^x xf(u)du > \int_0^x uf(u)du$

ii) Έχουμε $h'(x) = \dfrac{\left(\int_0^x uf(u)du\right)'\left(\int_0^x f(u)du\right) - \left(\int_0^x uf(u)du\right)\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{\left(\int_0^x f(u)du\right)^2} =$

$$\frac{x\left(\int_0^x f(u)du\right) - \left(\int_0^x uf(u)du\right)}{\left(\int_0^x f(u)du\right)^2} = \frac{f(x)\left(\int_0^x xf(u)du - \int_0^x uf(u)du\right)}{\left(\int_0^x f(u)du\right)^2} = \frac{f(x)g(x)}{\left(\int_0^x f(u)du\right)^2} > 0.$$

Άρα η $h(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

ΑΣΚΗΣΗ 4.74

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων διότι η f είναι συνεχής στο $\Re$ και η $-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική . Άρα $g'(x) = \left(\int_1^{x^3}|z|f(t)dt\right)' - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)' =$

$= |z|\, f(x^3)\,(x^3)' - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| = |z|\, f(x^3)\cdot 3x^2 - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

β) Παρατηρούμε ότι $g(1) = \int_1^1 |z|f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(1-1) = 0$, άρα για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $g(x) \geq g(1)$, δηλαδή το $g(1) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο της g . Επιπλέον το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $\Re$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat $g'(1) = 0 \Leftrightarrow |z|\, f(1^3)\cdot 3\cdot 1^2 - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| = 0 \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow}$

$3|z| - 3\left|z+\frac{1}{z}\right| = 0 \Leftrightarrow |z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ) Έχουμε : $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \left|\frac{z^2+1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{|z^2+1|}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = |z^2+1| \Leftrightarrow$

$|z^2| = |z^2+1| \overset{z^2=w}{\Leftrightarrow} |w| = |w+1| \Leftrightarrow |w|^2 = |w+1|^2 \Leftrightarrow w\overline{w} = (w+1)(\overline{w}+1) \Leftrightarrow$

$w\overline{w} = w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 \Leftrightarrow w + \overline{w} = -1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(w) = -1 \overset{z^2=w}{\Leftrightarrow} \mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι β < 0 διότι τότε εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την f στο [2 , 3] (η f είναι συνεχής στο [2 , 3] και θα είναι $f(2)f(3) < 0$) .

Έχουμε $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} < 0$ και $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$, άρα $\alpha^2 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0 \overset{\alpha>\beta}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha$, δηλαδή ο β είναι μικρότερος του αρνητικού - α άρα είναι αρνητικός .

ΑΣΚΗΣΗ 4.75

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι $2 < \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_0^1 e^{1-x^2}dx < 2e$

● Η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ έχει παράγωγο $f'(x) = 2xe^{x^2}$ με $x \in [0,1]$

x	0 1
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\nearrow$

$f(0)=1$ $f(1)=e$

min   *max*

και από τον πίνακα
προκύπτει ότι $1\le f(x)\le e$. Όμως η f για τα $x\in[-1,1]$ παίρνει και άλλες τιμές εκτός των $1,e$ (αφού δεν είναι σταθερή).
Κατά συνέπεια

$$\int_0^1 1\cdot dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 e\cdot dx\Rightarrow 1\cdot(1-0)<\int_0^1 e^{x^2}dx<e\cdot(1-0)\Rightarrow 1<\int_0^1 e^{x^2}dx<e \quad (1)$$

● Η συνάρτηση $g(x)=e^{1-x^2}$ έχει παράγωγο $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$ με $x\in[0,1]$

x	0 1
$f'(x)$	-
$f(x)$	$\searrow$

$f(0)=e$ $f(1)=1$

max   *min*

και από τον πίνακα
προκύπτει ότι $1\le g(x)\le e$. Όμως η g για τα $x\in[-1,1]$ παίρνει και άλλες τιμές εκτός των $1,e$ (αφού δεν είναι σταθερή).
Κατά συνέπεια

$$\int_0^1 1\cdot dx<\int_0^1 g(x)dx<\int_0^1 e\cdot dx\Rightarrow 1\cdot(1-0)<\int_0^1 e^{1-x^2}dx<e\cdot(1-0)\Rightarrow 1<\int_0^1 e^{1-x^2}dx<e \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις $(1),(2)$ και παίρνουμε $2<\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx<2e$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.76</u>

α) Για το ολοκλήρωμα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε x = f(t) , t∈[α , β] , οπότε

dx = f ΄(t)dt . Για x = f(α) παίρνουμε t = α , ενώ για x = f(β) παίρνουμε

t = β (η f είναι 1 – 1) . Το $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$ είναι καλώς ορισμένο αφού η

f^{-1} είναι συνεχής (f συνεχής $\Rightarrow C_f$ συνεχής γραμμή $\Rightarrow C_{f^{-1}}$ συνεχής γραμμή , αφού οι C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y = x $\Rightarrow f^{-1}$

συνεχής) . Έτσι είναι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} tf'(t)dt$. Επομένως :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) + tf'(t))dt = [\ tf(t)]_{\alpha}^{\beta} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) .$$

β) $f\,'(x) = e^x + 5x^4 > 0$, για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι 1 – 1 και σύμφωνα με

το (α) θα είναι : $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)dx = 1\cdot f(1) - 0\cdot f(0) - \int_{0}^{1} f(x)dx =$

$$= e + 1 - \int_{0}^{1} (e^x + x^5)dx = \frac{11}{6} .$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.77

$f\,'(x) = 1 + e^{-x^2} > 0$, για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα .

Έχουμε : $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$

$$x + \int_{2006}^{x} e^{-t^2}dt = x \Leftrightarrow \int_{2006}^{x} e^{-t^2}dt = 0 \Leftrightarrow x = 2006$$, αφού αν x > 2006

τότε

$$\int_{2006}^{x} e^{-t^2}dt > 0$$, ενώ αν x < 2006 τότε $\int_{2006}^{x} e^{-t^2}dt = -\int_{x}^{2006} e^{-t^2}dt < 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.78

α. Η δοσμένη γράφεται:

$$2f'(x) = e^{x-f(x)}$$

$$2f'(x) = e^x e^{-f(x)}$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{e^x}{2}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)'$$

Άρα $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c$ όμως $f(0) = 0$

οπότε $e^0=\frac{e^0}{2}+c \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$

και $e^{f(x)}=\frac{e^x+1}{2}$

τελικά $f(x)=ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$ (1)

Για το μετασχηματισμό του $\int_0^x f(x-t)dt$ θέτουμε:

$u=x-t$ $\quad \begin{matrix} u_1=x-t_1=x-0=x \\ u_2=x-t_2=x-x=0 \end{matrix}$

οπότε $du=-dt$

Άρα $-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$

Οπότε το δοσμένο όριο (1) ισούται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\overset{(\text{f συνεχής})}{=}\frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{f(0)}{1}=ln1=0$$

γ. $h(x)=\int_{-x}^{\alpha}t^{2005}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x}t^{2005}f(t)dt$

$h'(x)=\left(-\int_{\alpha}^{-x}t^{2005}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x}t^{2005}f(t)dt\right)'$ $\quad \begin{matrix} h'(x)=-x^{2005}f(-x)+x^{2005}f(x) \\ h'(x)=x^{2005}\left(f(x)-f(-x)\right) \end{matrix}$

$$h'(x)=x^{2005}\left(ln\frac{e^x+1}{2}-ln\frac{e^{-x}+1}{2}\right)$$

$$h'(x)=x^{2005}\,ln\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}$$

$$h'(x)=x^{2005}\,ln\frac{(e^x+1)e^x}{1+e^x}$$

$$h'(x)=x^{2006}$$

Επίσης $g(x)=\frac{x^{2007}}{2007}$ και $g'(x)=x^{2006}$

Άρα $h'(x)=g'(x)$

Οπότε από βασικό θεώρημα έχουμε: $h(x)=g(x)+c$

Όμως $h(0)=\int_0^0 t^{2005}f(t)\,dt=0$

$g(0)=0$

άρα $h(0)=g(0)+c$

$0=0+c$

$c=0$

Τελικά $h(x)=g(x)$.

δ. Α΄ λύση:

Αρκεί να λυθεί αντί της

$$\int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)\,dt=\frac{1}{2008}$$

$$ή\ \frac{x^{2007}}{2007}=\frac{1}{2008}\left(h(x)=g(x)\right)$$

Θεωρούμε την $\frac{x^{2007}}{2007}-\frac{1}{2008}\varphi(x)=$ στο [0,1]

- φ(x) συνεχής σαν διαφορά συνεχών στο [0, 1]
- $\left.\begin{matrix}\varphi(0)=-\frac{1}{2008}<0\\ \varphi(1)=\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}>0\end{matrix}\right\}\varphi(0)\varphi(1)<0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ $\varphi(\xi)=0$

$$\frac{\xi^{2007}}{2007}=\frac{1}{2008}$$

Επίσης

$\varphi'(x)=\left(\frac{x^{2007}}{2007}-\frac{1}{2008}\right)'$

$\varphi'(x)=x^{2006}>0$

Άρα $\varphi(x)$ γνησίως αύξουσα και η ρίζα ξ είναι μοναδική.

Β΄ λύση:

Με θεώρημα Bolzano πάμε όταν οι συμβατικές λύσεις για κάποιο λόγο δεν εφαρμόζονται. Εδώ όμως η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$x^{2004} = \frac{2007}{2008} < 1$$

Όμως ως γνωστό από την άλγεβρα Α΄ λυκείου (!) έχει μοναδική ρίζα την $x = \sqrt[2007]{\frac{2007}{2008}}$ η οποία βρίσκεται στο (0, 1) διότι:

$$0 < \frac{2007}{2008} < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt[2007]{\frac{2007}{2008}} < 1$$