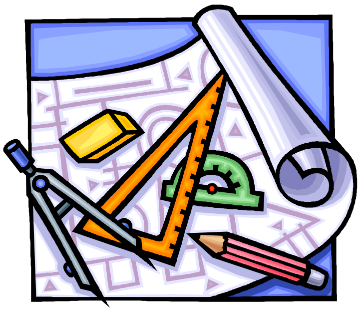
2012

ΘΕΩΡΙΑ
ΜΕΘΟΔΟΙ
ΘΕΜΑΤΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βαγγέλης Α Νικολακάκης
Μαθηματικός

1.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ- ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ

Σε ομόσημους κάνω πρόσθεση και βάζω το κοινό τους προσημό
Σε ετερόσημους κάνω αφαίρεση και βάζω το προσημό του μεγαλύτερου αριθμού

πχ. +3 +2 = +5
+3 -2 = +1
-3 +2 = -1
-2 -3 = -5

ΧΡΗΣΙΜΟ
Κάθε αριθμός χωρίς πρόσημο δεχόμαστε ότι είναι θετικός, δηλαδή α = +α πχ. 3= +3

2. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ , ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ- ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ

Σε ομόσημους βάζουμε πρόσημο (+) ,
ενώ σε ετερόσημους (-)

πχ. +3(+5) = +15
+3(-5) = -15
-3(+5) = -15
-3(-5) = +15

α	β	α · β	α : β
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

3. ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ (ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ)

(κάνουμε πράξεις, πρόσθεση κι αφαίρεση, μόνο με τα όμοια)

πχ. 3x +2 = ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x ή μόνο νούμερα)
$5x^2$-4x = ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x^2 ή μόνο x)
$6x^2$+3 = ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x^2 ή μόνο νούμερα)
3x + y = ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο x ή μόνο y)
2α+3β = ΤΙΠΟΤΑ (έπρεπε να έχω μόνο α ή μόνο β)
3x +7x = 10x
$2x^2 - 5x^2 = -3x^2$
8α -3α = 5α

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΑ x
$1x = 1\cdot x = x$
$0x = 0\cdot x = 0$
$x + x = 2x$
$x \cdot x = x^2$
$x \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x = x^3$
$2 \cdot 3x = 6x$
$3x \cdot 4x^2 = 12x^3$

4. ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΟΡΩΝ

πχ. μόνο με αριθμούς
Α=3+4-7-8+4-6-7+1-5+6+2-4
Γράφω πρώτα τα (+), μετά τα (-) (τα μετράμε στο σύνολο μην ξεχάσουμε κανένα)
Α=3+4+4+1+6+2-7-8-6-7-5-4
Διαγράφουμε αντίθετους (+α, -α) , αν υπάρχουν
$A=3+\cancel{4}+4+1+\cancel{6}+2-7-8-\cancel{6}-7-5-\cancel{4}$
Προσθέτουμε όλα τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε όλα τα (-) και βάζουμε (-)
Α= +10 - 27
Κάνουμε μόνο μία αφαίρεση
Α= -17

πχ. με αναγωγές , x^2, x, αριθμούς

$B= 3x-5x^2+6-3x-7-2x+5+7x^2-5x-2+4+5x^2+6x^2-3x-8x^2-4-6x-11-4x$

Γράφω πρώτα τα x^2, μετα τα x, μετά τους αριθμούς (με την σειρά που τα συναντώ)
(τα μετράμε στο σύνολο μην ξεχάσουμε κανένα)

$B= \underline{-5x^2+7x^2+5x^2+6x^2-8x^2}+\underline{3x-3x-2x-5x-3x-6x-4x}+\underline{6-7+5-2+4-4-11}$

Χωρίζουμε σε κάθε όμοιο όρο τους θετικούς απο τους αρνητικούς

$B=+\underline{7x^2+5x^2+6x^2-5x^2-8x^2}+\underline{3x-3x-2x-5x-3x-6x-4x}+\underline{6+5+4-7-2-4-11}$

Διαγράφουμε αντίθετους (+α, -α) , αν υπάρχουν

$B=+7x^2+\cancel{5x^2}+6x^2\ \cancel{-5x^2}-8x^2+\cancel{3x}\ \cancel{-3x}-2x-5x-3x-6x-4x+6+5+\cancel{4}\ -7-2\cancel{-4}-11$

Προσθέτουμε σε κάθε όρο τα (+) και βάζουμε (+), προσθέτουμε τα (-) και βάζουμε (-)

$B=+\underline{13x^2-8x^2}\ \underline{-20x}+\underline{11-20}$

Κάνω μία αφαίρεση σε κάθε όρο (στα x^2, στα x, στους αριθμούς)

$B=+5x^2-20x-9$

Σταματάω , γιατι τέλειωσαν οι αναγωγές ομοιών όρων (δεν γίνονται άλλες πράξεις)

5. ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Το (-) έξω από παρένθεση αλλάζει όλα τα πρόσημα όταν βγαίνει η παρένθεση,
ενώ το (+) τα αφήνει όπως είναι.

πχ. $-(3x^3-5x+4y-2\alpha+3)= -3x^3+5x-4y+2\alpha-3$

$+(5x^3-4x+8\beta-3x^2+9)= +5x^3-4x+8\beta-3x^2+9$

6. ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ (ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗ) (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ)

(όταν έχω αριθμό με παρένθεση συνεχόμενα ή παρενθέσεις διαδοχικά, εννοείται το επί)

πχ. $-2(3-5x^2+7x)=-6+10x^2-14x$ (αριθμός επί παρένθεση, υπολογίζω το (–) του -2)

$(x-1)(x-3) = x^2-3x-x+3$ (παρένθεση επί παρένθεση)

$-2\,(x-1)(x-3) = -2(x^2-3x-x+3)=-2x^2+6x+2x-6$

(αριθμός επί δυο παρενθέσεις, πρώτα τις δυό παρενθέσεις και ό,τι βρω σε παρένθεση και μετά επιμεριστική με τον αριθμό)

$$-3(3x+4)^2=-3\left((3x)^2+2\cdot 3x\cdot 4+4^2\right)=-3(9x^2+24x+16)=-27x^2-72x-48$$

(αριθμός επί ταυτότητα, πρώτα την ταυτότητα και ό,τι βρώ σε παρένθεση και μετά επιμεριστική τον αριθμο με την παρένθεση)

7. ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$a^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \pi o\lambda\lambda/\sigma\mu o\varsigma}$$

$\alpha^0=1$ $\quad 3^0=1$

$\alpha^1=\alpha$ $\quad 5^1=5$

$\alpha^2=\alpha\cdot\alpha$ "στο τετράγωνο" $\quad 7^2=7\cdot 7=49$

$\alpha^3=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ "στον κύβο" $\quad 3^3=3\cdot3\cdot3=9\cdot3=27$

- **<u>προσοχή</u>:** $-\alpha^2=-(\alpha^2)$ ενώ $(-\alpha)^2=+\alpha^2$ δηλαδή $-3^2=-9$, ενώ $(-3)^2=+9$

$\alpha^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}$, ΄΄αντίστροφος του α΄΄ $\quad 7^{-1}=\dfrac{1}{7}$

$\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ $\quad$ πχ. $4^{-3}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{4\cdot4\cdot4}=\dfrac{1}{16\cdot4}=\dfrac{1}{64}$

8. ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ (ΣΕΙΡΑ ΠΡΑΞΕΩΝ)

Α. Χωρίς Παρενθέσεις

1. Δυνάμεις
2. Πολλαπλασιασμοί – Διαιρέσεις
3. Προσθέσεις - Αφαιρέσεις

$$A = 4\cdot 2^3 - 8:2^2 + 6^1:(-3) - 4^2:\left(-2\right) + 6^2:7^0 - 5^2 + 3^3:9^1 + \left(-7\right)^2:2^0$$

Κάνουμε πρώτα μόνο τις δυνάμεις και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι

$$A = 4\cdot 8 - 8:4 + 6:(-3) - 16:\left(-2\right) + 36:1 - 25 + 27:9 + 49:1$$

Μετά κάνουμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις προσέχοντας τα πρόσημα

$$A = 32 - 2 - 2 + 8 + 36 - 25 + 3 + 49$$

Τέλος κάνουμε προσθέσεις κι αφαιρέσεις , χωρίζοντας τους θετικούς από τους αρνητικούς

$$A = \underline{32 + 8 + 36 + 3 + 49} - \underline{2 - 2 - 25}$$

Προσθέτω όλα τα (+) και βάζω (+), προσθέτω όλα τα (-) και βάζω (-)

$$A = 128 - 29 = 99$$

Β. Με Παρενθέσεις

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με τη παραπάνω σειρά (1-2-3) , αφήνοντας τα υπόλοιπα έξω απο τις παρενθέσεις όπως είναι και μόλις φύγουν οι παρενθέσεις κανουμε τις πράξεις όπως πριν (με την σειρά 1-2-3)

$$B = 2(3^1 - 7:2^0)\left(-7^2 + 6:2 + 2\cdot 5^2\right)^2 - 2^2\left(3 - 4^2:\left(-8\right)\right) - \left(4\cdot 5 - 4 - 4\cdot 3\right)\left(2-5\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

Κάνουμε τις πράξεις μόνο μέσα στις παρενθέσεις με την γνωστή σειρά και αφήνουμε τα υπόλοιπα όπως είναι, μέχρι σε κάθε παρένθεση να μείνει ένας αριθμός

$$B = 2(3 - 7:1)\left(-49 + 6:2 + 2\cdot 25\right)^2 - 2^2\left(3 - 16:\left(-8\right)\right) - \left(20 - 4 - 12\right)\left(-3\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

$$B = 2(3-7)\left(-49 + 3 + 50\right)^2 - 2^2\left(3+2\right) - \left(20 - 16\right)\left(-3\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

$$B = 2(-4)\left(+3 + 50 - 49\right)^2 - 2^2\left(5\right) - \left(4\right)\left(-3\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

$$B = 2(-4)\left(53 - 49\right)^2 - 2^2\left(5\right) - \left(4\right)\left(-3\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

$$B = 2(-4)\left(4\right)^2 - 2^2\left(5\right) - \left(4\right)\left(-3\right) + \left(-6\right)^2:4 + 5:\left(-5\right)$$

Τότε κάνω τις πράξεις με την παραπάνω σειρά προσέχοντας τα πρόσημα

$$B = 2(-4)16 - 4\left(5\right) - \left(4\right)\left(-3\right) + 36:4 + 5:\left(-5\right)$$

$$B = -128 - 20 + 12 + 9 - 1$$

$$B = \underline{+12 + 9} - \underline{128 - 20 - 1}$$

$$B = 21 - 149 = -128$$

Γ. Με Άγκιστρα, Αγκύλες, Παρενθέσεις

Τα απαλείφουμε (βγάζουμε) από μέσα προς τα έξω

πχ. με μεταβλητές και αριθμούς (αλγεβρική παράσταση)
(ταυτότητες με δυνάμεις , επιμεριστικές , απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγές)

$$\Gamma = 2\left\{3x - 2\left[x - 3x\left(7-x\right) + x - 4\right] - \left(x-2\right)\right\} + 2\left[3\left(2x+1\right) - 4\right]\left(x-3\right) - x\left(5-x\right)$$

$$\Gamma = 2\left\{3x - 2\left[x - 21x + 3x^2 + x - 4\right] - \left(x-2\right)\right\} + 2\left[6x + 3 - 4\right]\left(x-3\right) - x\left(5-x\right)$$

$$\Gamma = 2\left\{3x - 2x + 42x - 6x^2 - 2x + 8 - x + 2\right\} + 2\left[6x - 1\right]\left(x-3\right) - x\left(5-x\right)$$

$$\Gamma = 6x - 4x + 84x - 12x^2 - 4x + 16 - 2x + 4 + 2\left(6x^2 - 18x - x + 3\right) - 5x + x^2$$

$\Gamma = \underline{\underline{6x}} - \underline{\underline{4x}} + \underline{\underline{84x}} - \underline{12x^2} - \underline{\underline{4x}} + 16 - \underline{\underline{2x}} + 4 + \underline{12x^2} - \underline{\underline{36x}} - \underline{\underline{2x}} + 6 - \underline{\underline{5x}} + \underline{x^2}$

Χωρίζω τους όμοιους όρους, δηλαδή πρώτα τα x^2, μετά τα x,και τέλος τα νούμερα

$\Gamma = \underline{-12x^2 + 12x^2 + x^2} + \underline{6x - 4x + 84x - 4x - 2x - 36x - 2x - 5x} + \underline{16 + 4 + 6}$

Χωρίζω στους όμοιους όρους τα (+) από τα (-), δηλαδή στα x^2, στα x, και στα νούμερα

$\Gamma = \underline{+\cancel{12x^2} + x^2 - \cancel{12x^2}} + \underline{6x + 84x - 4x - 4x - 2x - 36x - 2x - 5x} + \underline{16 + 4 + 6}$

Προσθέτω όλα τα (+) και βάζω (+), προσθέτω όλα τα (-) και βάζω (-), στους όμοιους όρους

$\Gamma = \underline{x^2} + \underline{90x - 53x} + \underline{26}$

$\Gamma = x^2 + 37x + 26$

9. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΣΧΟΛΙΟ
Κάθε αριθμός που δεν είναι κλάσμα γράφεται σαν κλάσμα με παρονομαστή την μονάδα , δηλαδή $a = \frac{a}{1}$ πχ. $7 = \frac{7}{1}$

Ομώνυμα κάνουμε μόνο σε πρόσθεση
κι αφαίρεση, όχι σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση.
Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή (το ΕΚΠ των παρονομαστών).

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = 1, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

$\otimes$ $\quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

$(\div)$α. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$ (αντιστρέφω διαιρέτη και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό)

β. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$ (πολλαπλασιάζω τους άκρους όρους και το γινόμενο μπαίνει αριθμητής, πολλαπλασιάζω τους μέσους όρους και το γινόμενο μπαίνει παρονομαστής)

(+),(-) ομώνυμα, αφού βρούμε το ΕΚΠ, στα καπελάκια βάζουμε τον αριθμό (ΕΚΠ/παρονομαστή)

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{2} + 5 \overset{\text{ΕΚΠ}=6}{=} \frac{\overset{2}{2}}{3} - \frac{\overset{3}{7}}{2} + \frac{\overset{6}{5}}{1} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 1} = \frac{4}{6} - \frac{21}{6} + \frac{30}{6} = \frac{4 - 21 + 30}{6} = \frac{4 + 30 - 21}{6} = \frac{34 - 21}{6} = \frac{13}{6}$$

10. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΕΣ

Κάνω πρόσθεση, αφαίρεση ριζών μόνο όταν έχω ίδιες ρίζες, σαν την αναγωγή.

πχ. $2 + \sqrt{3}$ = ΤΙΠΟΤΑ

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ = ΤΙΠΟΤΑ

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

$5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{6}$

$3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} = 6\left(\cancel{\sqrt{7}}\right)^{\cancel{2}} = 6 \cdot 7 = 42$

$\left(\cancel{\sqrt{3}}\right)^{\cancel{2}} = 3, \quad \left(\cancel{\sqrt{5}}\right)^{\cancel{2}} = 5$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3 \quad , ... , \quad \sqrt{64} = 8$

$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

$\left(\cancel{\sqrt{\alpha}}\right)^{\cancel{2}} = \alpha, \quad \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

$\left(\alpha\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha^2\left(\cancel{\sqrt{\beta}}\right)^{\cancel{2}} = \alpha^2 \cdot \beta$

$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 \cdot 2 = 18$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΠΡΑΞΕΙΣ

1. Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή , μπορεί όμως να είναι λάθος.Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το Σ αν αυτή είναι σωστή και το Λ αν αυτή είναι λάθος.

- Ο αριθμός –χ είναι ένας αρνητικός ρητός αριθμός. ………
- Ο αριθμός –χ είναι ο αντίθετος του αριθμού χ και μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αν ο χ είναι αρνητικός ή θετικός αντίστοιχα. ……..
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες απόλυτες τιμές. …….
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια πάντα απόλυτη τιμή αφού αυτή εκφράζει την απόσταση των σημείων του άξονα στα οποία αυτοί μπαίνουν από την αρχή του. …..
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. ……
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός. …..
- Ο αντίθετος του χ είναι ίσος με το γινόμενο του –1 με τον χ δηλαδή **–χ = (-1)·χ**
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αριθμό ομόσημο μ' αυτούς.
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο έναν θετικό αριθμό.
- Οι ετερόσημοι έχουν γινόμενο έναν αρνητικό αριθμό.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό αριθμό.
- Αν α ένας ρητός αριθμός τότε α ·1 = α και α ·0 = 0.
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο –1
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1

2. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(-1+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)$ β) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right):\left(1-\frac{5}{6}\right)$

γ) $(-2+3,1)-2(5-3,2+4)+4(2-1,6)$ δ) $5-(-2+7,5+4):0,5+1,2(2,1+3,5-4,6)$

3. Να βρεθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{\frac{2}{3}-3+\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}-2+\frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{1-\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)}$ γ) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}:\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}+\frac{4}{5}}$ δ) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+3}$

4. Στη παράσταση -7x+(-4y+2x)-(3x-5y) να απαλείψετε τις παρενθέσεις και να βρείτε την αριθμητική της τιμή για x=-3, y=-4. Το ίδιο να κάνετε για τη παράσταση -12x+(-9y+4x)-(x-7y) θέτοντας όπου x=-2 και y=-5.

5. Γνωρίζοντας ότι α – β = -1 και χ + ψ = 7 να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$Π_1$ = -2α + 2β +5χ +5ψ
$Π_2$ = 4 . (χ + ψ + 5α) - 20β
$Π_3$ = 2α + 3α - 5β + 7χ + 2ψ +5ψ
$Π_4$ = α – β + χ + 8ψ – 3ψ + 4χ
$Π_5$ = χα +ψα– χβ – ψβ

6. **Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.**

$$A = \frac{3-\frac{1}{2}}{-2:(-3+2)}:\frac{5}{2} \qquad B = \frac{\chi(\psi-\frac{2}{\chi})-\psi(\frac{3}{\psi}+\chi)}{-7\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)}:(-5) \qquad \Gamma = \frac{-2-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

$$\Delta=\left(-\frac{1}{-3}+\frac{-7}{3}-2\right):\left(\frac{-2}{4004}\right) \qquad E=-\frac{-2-(-2)\cdot(-5)}{-6:\frac{2}{3}}+\frac{(-10):(-2)-(-3)\cdot 2+1}{-8\cdot 2}:\frac{-4}{3}$$

Β ΔΥΝΑΜΕΙΣ

7. **Στις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση:**

- $5^{\nu+2} - 5^{\nu+1} = \ldots\ldots$ Α.: $5^{\nu+1}$ Β.: 5^{ν} Γ.: $4\cdot 5^{\nu+1}$ Δ.: 5 Ε.: $5^{(\nu+2):(\nu+1)}$
- $4\cdot 3^{\nu+3} - 10\cdot 3^{\nu+2} = \ldots\ldots$ Α.: $-6\cdot 3^{\nu+1}$ Β.: $-6\cdot 3^{\nu+5}$ Γ.: $-6\cdot 3^{2\nu+5}$ Δ.: $18\cdot 3^{\nu+2}$ Ε.: $2\cdot 3^{\nu+2}$

  $4^{\nu+2} + 6\cdot(-2)^{2\nu+1} = \ldots\ldots$ Α.: $2^{2\nu+1}$ Β.: $(-2)^{2(\nu+1)}$ Γ.: $4\cdot 2^{2\nu+1}$ Δ.: $(-2)^{2\nu}$ Ε.: $(-2)^{2\nu+1}$

8. **Αν $5^x = (-5)^x$, τότε ο ακέραιος αριθμός x είναι ………………… .**

Α.: 1 Β.: -1 Γ.: ένας περιττός ακέραιος Δ.: ένας άρτιος ακέραιος

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

9. **Αν $\alpha^{\kappa+\lambda} = 1$, τότε ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή;**

Α.: $\kappa=\lambda$ Β.: $\kappa+\lambda\neq 0$ Γ.: $\alpha=0$ Δ.: $\alpha\neq 0$ και $\kappa=-\lambda$

10. **Αν $\alpha\neq 0$, τότε : $(\alpha^{\alpha})^{2\alpha} = \ldots$**

Α.: $\alpha^{3\alpha}$ Β.: $\alpha^{2\alpha^2}$ Γ.: $\alpha^{2\alpha}$ Δ.: α^3

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

11. **Να υπολογισθούν οι παραστάσεις**

α) $\dfrac{(-1)^7+(-3)^3}{-2^2}-\dfrac{-1^4+(-2)^6}{-3^2}$ β) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3-(-1)^5}:\dfrac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^4}{-1^5-\frac{1}{2}}$

12. **Να υπολογισθούν οι παραστάσεις**

$A=36(-\frac{1}{2})^2-3^{-2}\cdot 9+[-3+2(-1)^3]\,(2)^3$ $B=2^3+81(-\frac{1}{3})^3-2^{-3}\cdot 24+[(-2)^{-2}8-5](-2)^3$

$\Gamma=18(\frac{1}{3})^2-2^{-2}\cdot 4+[-3-2(-1)^3]\,(2)^3$ $\Delta=(15^{20}.8^{10}.27^{-5}):(10^{19}.12^5)$

13. **Αν** $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{3}{2}$, **και** $\gamma=-1$ **να υπολογισθεί η τιμή της παράσταση**

$A=\frac{-\alpha^2}{\beta^2-\gamma^2}:\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^3}{(2+\beta)^2}$

14. **Αν αβ=-2 και α+β=6 να συμπληρωθούν με την βοήθεια των δυνάμεων οι ισότητες**

α) $\frac{\alpha^0\beta^0}{\alpha^2\beta^{-2}}(\alpha^{-2})^{-2}$ **β)** $(\alpha^{-2}\beta^{-3})^0:(\alpha^{-1}+\beta^{-1}$

15. **Να γράψετε τις παραστάσεις με μορφή μιας δύναμης.**

$A=8^2\cdot 9^3\cdot 5^6$, $B=(3^4)^2+3^{10}:9+3^5\cdot 3^3-2\cdot 3^9$, $\Gamma=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot 32-\left(\frac{1}{64}\right)^{-1}$,

$\Delta=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right]^2+3^{10}\cdot 9^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-12}\cdot 81^{-1}$ $E=\frac{2^{-7}\cdot 10^5(-x)^4y^{-8}\cdot 5^8\cdot 8^{-2}}{10^3\cdot 2^{-18}\cdot(-5)^{10}y^2x^4\cdot 8^{-1}}$

16. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :**

$A=\left(\frac{1}{x}\right)^{-6-x}-\left(-\frac{x}{3}\right)^x+(5+x)\left(-x-\frac{1}{3}\right)^{x+3}$ **αν** $x=-3$

17. **Αν** $x=-\frac{1}{2}$ **και** $y=-1$ **και** $z=\frac{1}{3}$ **να βρεθεί ο αντίστροφος του** $A=-6x^2-2y^{-3}+4z^{-1}$

18. **Αν** $x=-\frac{1}{2}$ **και** $y=-1$ **και** $z=\frac{1}{3}$ **να βρεθεί ο αντίστροφος του** $A=-4x^3+5y^{-2}-2z$

19. **Να βρείτε την τιμή της παράστασης :** $A=(-2\alpha^2\beta\gamma^3)^3:\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\right)^2$ **για α=-1 ,β=2, γ=1.**

20. **Να υπολογιστεί ο x σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις :**

α) $4^{(3-x)(2-x)}=1$, **β)** $2^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, **γ)** $\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{8}{27}$, **δ)** $2^x=2^{-x}$

21. **Στις παρακάτω ισότητες να υπολογίσετε τον ακέραιο x .**

i) $3^{16}=3^{x}\cdot 3^{4x+1}$ **ii)** $(0,2)^{-3}\cdot 5^{x}=125^{2}$ **iii)** $(-3)^{x+2}\left(-\frac{1}{9}\right)^{x}=27$ **iv)** $8^{-x+3}=1$

22 **Αν** $\alpha^{x} = 2$, $\alpha^{y} = 3$ **και** $2^{\psi}\times 3^{\chi} = \left(\alpha^{2}\right)^{x+y}$, **να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $x^{-1}+y^{-1}$ **, όπου οι αριθμοί α , x , y είναι θετικοί πραγματικοί,** $\alpha \neq 1$

23. **Έστω ότι ισχύει :** $[\,9^{\nu}\cdot 3^{2}\cdot\left(3^{-\nu}\right)^{-1} - 27^{\nu}\,]\cdot(3^{\mu}\cdot 2)^{-3} = 27^{-1}$**, όπου μ , ν φυσικοί αριθμοί.**
Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί μ και ν είναι διαδοχικοί φυσικοί.

24. **Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β αν γνωρίζετε ότι:** $\alpha\beta^{2} = 2$ **και** $\alpha^{3}\beta = -2^{-2}$**.**

25. **Μία μπάλα όταν πέφτει από κάποιο ύψος αναπηδά και φτάνει στο μισό αυτού του ύψους.**
Αφήνουμε την μπάλα να πέσει από κάποιο ύψος χ.
α) Να υπολογίσετε σε σχέση με το χ το ύψος που θα φτάσει η μπάλα μετά από:

- **1 αναπήδηση.**
- **2 αναπηδήσεις.**
- **3 αναπηδήσεις .**
- **ν αναπηδήσεις.**
-

β) Αν αφήσουμε την μπάλα από ύψος 1m να βρείτε μετά από ποια αναπήδηση θα φτάσει σε ύψος 6,25 cm.
γ) Να υπολογίσετε από ποιο ύψος αφήσαμε την μπάλα να πέσει αν μετά την 10η αναπήδηση έφτασε στα 2^{-9} **m.**

26. **Εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε**

$$A=\frac{x^{-13}\cdot y^{2}\cdot(x^{-2}\cdot y^{-3})^{3}\cdot(x^{-3}\cdot y^{2})^{-2}}{(x^{4}\cdot y^{3})^{-4}}$$ **για** $x=(-10)^{2}$ **και** $y=-10^{6}$ **.**

$$B=\frac{(x^{3}\cdot y)^{-3}\cdot(x^{2}\cdot y^{-3})^{-1}}{(x^{-3}\cdot y^{-2})^{3}\cdot(x\cdot y^{-3})^{-2}}$$ **για** $x=(-2)^{-3}$ **και** $y=-2^{3}$

$$\Gamma=\frac{(x^{2}\cdot y^{-2})^{3}\cdot(x^{-1}\cdot y^{2})^{4}}{(x^{5}:y^{2})^{-3}\cdot(x^{3}\cdot y^{-1})^{2}}$$ **για** $x=10^{5}$ **και** $y=(-0,1)^{-2}$

$$\Delta=\frac{(x^{-2}:y^{-3})^{3}\cdot x^{-4}}{(y^{2}:x^{3})^{2}:y^{-6}}$$ **για** $x=2^{-2}$ **και** $y=-4^{4}$

$$E = \frac{(x^{-3}:y^{-2})^{-1}\cdot x}{y^6:(x^2)^2}$$ για $\chi = -3^3$ και $y = 3^{-3}$

Γ ΡΙΖΕΣ

27. **Να συμπληρώσετε τις ισότητες :** **α)** $\sqrt{0{,}04} = \ldots.$ **β)** $\sqrt{225} = \ldots$ **γ)** $\sqrt{10^6} = \ldots.$ **δ)** $\sqrt{\sqrt{16}} = \ldots..$

28. **Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :**

α) $\sqrt{0{,}02}\sqrt{0.08} = \ldots.$ **β)** $\sqrt{2003}\sqrt{2003} = \ldots$ **γ)** $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}} = \ldots.$ **δ)** $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2}\sqrt{200}} = \ldots..$

29. **Συμπληρώστε τις προτάσεις:**

- **Αν** $\sqrt{a} = x$ **με α, χ μη αρνητικούς αριθμούς τότε ισχύει …………..**
- **Αν** $\sqrt{a^2} = a$ **τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι ……………**
- **Αν** $\sqrt{a^2} = -a$ **, τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι…………………**
- **Αν α οποιοσδήποτε αριθμός τότε** $\sqrt{a^2} = \ldots\ldots.$
- **Αν** $a \geq 0$ **τότε** $(\sqrt{a})^2 = \ldots\ldots.$
- **Αν** $a \geq 0$ **τότε** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \ldots\ldots.$
- **Αν** $x \geq 0$ *και* $\sqrt{5} = x$ **τότε** $x^2 = \ldots\ldots.$
- **Αν** $x^2=5$ **και** $x \geq 0$ **τότε x=…….**
- **Αν** $x^2=5$ **και x<0 τότε x=…….**

30. **Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:**

α) $6 \cdot \sqrt{\frac{7}{9}}$ β) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{75}{16}}$ γ) $x \cdot \sqrt{\frac{200}{x^2}}$ δ) $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

ε) $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{2}}$ στ) $10 \cdot \sqrt{\frac{x^6}{25}}$ αν $x > 0$

31. **Σε κάθε περίπτωση να γίνουν οι πράξεις:**

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{320}$ 2) $\sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{\frac{32}{7}}$ 3) $3\sqrt{8} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{90}$ 4) $5\sqrt{8} \cdot 7\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{12}$

5) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$ 6) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}}$ 7) $\sqrt{48} + \sqrt{75}$ 8) $8\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

32. **Ομοίως**

1) $6\sqrt{8}-3\sqrt{50}+9\sqrt{98}$ 2) $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ 3) $\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{24}\right)$ 4) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

5) $\left(24\sqrt{6}-30\sqrt{54}\right):3\sqrt{2}$ 6) $\left(5-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)$ 7) $\left(8+\sqrt{3}\right)\left(8-\sqrt{3}\right)$

8) $\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$ 9) $\dfrac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{98}}:\dfrac{5}{7\sqrt{22}}$ 10) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2$

33. **Να υπολογιστεί η παράσταση : A=**$\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$

34. **. Να γίνουν οι πράξεις : i) 3** $\sqrt{5}+4\sqrt{20}-5\sqrt{45}$ **, ii)** $8\sqrt{24}-2\sqrt{54}+3\sqrt{150}$

35. **Να δείξετε ότι οι παραστάσεις A=**$\sqrt{24}+2\sqrt{10}-2\sqrt{6}-\sqrt{40}$
και B=$\sqrt{18}+4\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{162}$ **είναι ίσες .**

36. **Εάν είναι** $\alpha=1+\sqrt{2}$ **και** $\beta=1+\sqrt{3}$ **να δείξετε ότι ισχύει η σχέση**
$3\alpha^2-6\alpha+3=2\beta^2-4\beta+2$.

37. **Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή**

α) $\dfrac{9\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$ β) $\dfrac{12-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ γ) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ δ) $\dfrac{5}{\sqrt{2}-1}$

38. **Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:**

1) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{24}+\dfrac{12}{16}-\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 3) $\dfrac{3+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ 4) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

39. **Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :**

$$A=\left[2\sqrt{\frac{4}{3}}:\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right]:\left[5\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right]$$

40. **Αν είναι** $x=\dfrac{25}{16}$**, y=1,** $z=\dfrac{3}{4}$ **να επαληθευτεί η ισότητα:**

$$\left(x-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+y\right)\cdot\sqrt{x-y}=\frac{3z^4}{\sqrt{x-z^2}}$$

41. **Να βρεθεί η τιμή της παράστασης** $A=\sqrt{(x-3)^2}-2\sqrt{(3x+1)^2}$ **όταν είναι :**
1) x=4 2) x=-2.

42. **Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :**

$A=\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$, $B=\sqrt{\sqrt{20}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{20}+4}$

43. **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :**

$A=\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}$, $B=\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{31+\sqrt{25}}}}$, $\Gamma=\left(\sqrt{25}+2\sqrt{10}\right):2\sqrt{2}$

44. **Να δείξετε ότι :** $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=0$.

45. **Αν είναι** $A=\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **να δείξετε ότι** $A^2=4$ **και να εξετάσετε εάν ισχύει ότι A=-2.**

46. **Έστω οι θετικοί αριθμοί α, χ για τους οποίους ισχύει** $\chi\sqrt{\chi}=\alpha$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $\chi^3=\alpha^2$

β) Αν $\chi^3=32$ **να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $\alpha\sqrt{2}$

47. **Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:**

$A=\sqrt{1+\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{15+\sqrt{100}}}}}\ \sqrt{18}$ $B=\sqrt{\dfrac{4}{3}\sqrt{\sqrt{12}\sqrt{\sqrt{9}}}\ \sqrt{1{,}5}}$

48. **Να υπολογίσετε τους αγνώστους χ, ψ, ω αν** $\chi\sqrt{3}=\sqrt{300}$, $\psi\sqrt{\chi}=\sqrt{90}$, $\chi\psi\sqrt{\omega}=1$

49. **Αν το τετράγωνο ενός αρνητικού αριθμού χ είναι 5 , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:** $A=(\chi\sqrt{\chi^2})^3+125$

Δ ΣΥΝΘΕΤΑ - ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

50. **Δίνεται ότι** $x+y=2012$ **.Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης**

$$A=2012-\frac{6-10x+2\left(4x-y-3\right)}{3\left(x-z\right)+3\left(y+z\right)}-2\left(x+\frac{1}{3}\right)-2y$$ **(Απ: -2012)**

51. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:**
Π = (200 + 196 + 192 + ……+ 8 + 4) – (198 + 194 + 190 + ….+ 6 + 2)   (Ε.Μ.Ε. 1999)

52. **Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει:** $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=3$**, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:**

$A=\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, $B=\frac{-2\alpha+3\beta}{-\beta}$, $\Gamma=\frac{4\alpha-3\beta}{3\alpha-4\beta}$

53. **Να δείξετε ότι :** $\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^{-1}=\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}$

54. **Να απλοποιηθεί η παράσταση : Α=**$\frac{x^{-4}y^{2}\left(x^{-1}y^{-2}\right)^{4}\left(x^{-2}y\right)^{-1}}{\left(x^{2}y\right)^{-2}y^{3}}$ **και να υπολογιστεί η τιμή της ,όταν** $x=(-10)^{-5}$ **και** $y=-10^{4}$ **.**

55. **Να βρείτε την τιμή της παράστασης : Α=**$\frac{\left[\left(\alpha^{2}\beta^{3}\right)^{-1}\cdot\left(\alpha\beta^{3}\right)^{2}\right]^{2}}{\left(\alpha^{3}\cdot\beta\right)^{-3}}$ **, αν οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι**

56. **Έστω οι θετικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει:** $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$**.**
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\sqrt{\beta^{2}+\gamma\sqrt{\alpha^{2}-\beta\sqrt{\beta\sqrt{\alpha^{2}-\gamma^{2}}}}}-\alpha$

57. **Αν ισχύει ότι** $\frac{3x+y}{2x-2y}=5$ **,να δείξετε ότι το κλάσμα** $\frac{x^{2}+2y^{2}}{xy}$ **έχει σταθερή τιμή. (Απ 3)**

58. **Να δείξετε ότι η παράσταση** $A=\sqrt{\sqrt{16}}+2\sqrt{\sqrt{81}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\sqrt{8}$ **,είναι πολλαπλάσιο του 7.**

59. **Αν α , β είναι μη αρνητικοί αριθμοί , να δείξετε ότι η παράσταση**

$$A=\sqrt{49-2\beta+\sqrt{4\beta^2+\alpha-\sqrt{\alpha^2}}}$$ **έχει σταθερή τιμή . (Απ : Α=7)**

60. **Να δείξετε ότι** $\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}}=1$

61. **Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:**

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

62. **Αν το τετράγωνο ενός αρνητικού αριθμού χ είναι 5 , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης** $A=(x\sqrt{x^2})^3+125$

63. **Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:**

$$\Pi=\sqrt{7}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^0+\left(\sqrt{2}\right)^1+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

είναι ίση με 7.

1.2 ΜΟΝΩΝΥΜΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ

● **Αλγεβρική παράσταση** λέγεται μια έκφραση, που δηλώνει μια σειρά πράξεων μεταξύ αριθμών, ορισμένοι από τους οποίους παριστάνονται με γράμματα (μεταβλητές).

● **Αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης, λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με συγκεκριμένους αριθμούς και μετά εκτελέσουμε τις πράξεις.

(Η εκτέλεση των πράξεων γίνεται σύμφωνα με τη γνωστή προτεραιότητα των πράξεων)

● **Μια αλγεβρική παράσταση θα λέγεται:**
Άρρητη, όταν περιέχει μεταβλητή κάτω από σύμβολο τετραγωνικής ρίζας
Κλασματική, όταν περιέχει γράμμα σε παρονομαστή
Ακέραια, όταν δεν είναι ούτε άρρητη ούτε κλασματική

2. ΜΟΝΩΝΥΜΑ

● **Μονώνυμο** ονομάζουμε κάθε αλγεβρική παράσταση, που περιέχει μόνο πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.
Σε κάθε μονώνυμο λοιπόν υπάρχει μόνο ένας αριθμητικός παράγοντας. Ο παράγοντας αυτός γράφεται πρώτος και λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου. Όλοι οι άλλοι παράγοντες (μεταβλητές), αποτελούν το κύριο μέρος του μονωνύμου.

παράδειγμα

Μονώνυμο	3χψ	$2\chi^2$	$(\sqrt{2}-1)\chi^3$	$\frac{2}{3}\chi$	5	$\frac{\chi^2\psi}{2}$
Συντελεστής	3	2	$\sqrt{2}-1$	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{1}{2}$
Κύριο μέρος	χψ	χ^2	χ^3	χ	χ^0	$\chi^2\psi$

● **Βαθμός** μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή, είναι ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

● **Βαθμός** μονωνύμου (ως προς όλες τις μεταβλητές που περιέχει), είναι το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών που περιέχει,
π.χ. το μονώνυμο $χ^3ψ^5z$, είναι τρίτου βαθμού ως προς x, πέμπτου βαθμού ως προς y, πρώτου βαθμού ως προς z, μηδενικού βαθμού ως προς ω και $9^{ου}$ βαθμού ως προς όλες τις μεταβλητές του (διότι 3+5+1=9).

παράδειγμα

Μονώνυμο	$2χ^2ψ$	$2χψ$	$2χ$	$2χ^2ψ^3$	5	0
Βαθμός	3	2	1	5	0	Δεν ορίζεται
Βαθμός ως προς χ	2	1	1	2	0	Δεν ορίζεται
Βαθμός ως προς ψ	1	1	0	3	0	Δεν ορίζεται

● **Μηδενικό μονώνυμο**, είναι κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν,
Π.χ. $0χψ^2ω$

● **Όμοια μονώνυμα**, λέγονται αυτά που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
Π.χ τα $3χ^4ψω$ και $-7ωχ^4ψ$ είναι όμοια , ενώ τα $3χ^2ψ$, $3χψ^2$ δεν είναι

● **Αντίθετα μονώνυμα**, λέγονται αυτά που είναι όμοια και έχουν αντίθετους συντελεστές.
Π.χ. τα $3χ^3ψ^2ω$ και $-3χ^3ψ^2ω$ είναι αντίθετα

3. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

● **Άθροισμα** όμοιων μονωνύμων, είναι ένα όμοιο προς αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
Π.χ. $3χψ+2χψ$ = ...,$2χ^3ω$ $-7χ^3ω$ = ... , ενώ η πρόσθεση $2χ^2ψ+3χψ^2$ δεν γίνεται .
Το άθροισμα δυο αντίθετων μονωνύμων, είναι το **μηδενικό** μονώνυμο.

Το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια, δεν είναι μονώνυμο, αλλά είναι μια αλγεβρική παράσταση που την ονομάζουμε πολυώνυμο.

● **Γινόμενο μονωνύμων**, είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμιά το άθροισμα των εκθετών της.
Π.χ. $(2χ^2ψ^3ω)(-3χ^5ψ^6ω^4z)$ = ...

● **Το πηλίκο μονωνύμων**, όπως και στους αριθμούς βρίσκεται, με πολλαπλασιασμό επί τον αντίστροφο του διαιρέτη. (Δεν είναι πάντοτε μονώνυμο).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. **Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή επιλογή**

α) Έχουμε τα μονώνυμα: Α=$\frac{\sqrt{3}x^2z}{4}$, Β=-3,1y^2z^3, Γ=2x^3z, Δ=4xz, Ε=-3,14y^2z^3. Όμοια είναι τα εξής:

Α. Τα Α, Γ, Δ Β. Τα Α, Β Γ. Τα Β, Ε Δ. Τα Α, Ε

β) Το μονώνυμο -x^2 έχει συντελεστή:

Α. Το x Β. Το -x Γ. Το 1 Δ. Το -1.

γ) Το γινόμενο $\left(-\frac{3}{5}\alpha^2\beta\gamma\right)\cdot(2\alpha^2\beta\gamma)$ ισούται με:

Α. -$\frac{6}{5}\alpha^2\beta\gamma$ Β. -$\frac{6}{5}\alpha^4\beta^2\gamma^2$ Γ. -$\frac{6}{10}\alpha^4\beta^2\gamma^2$ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα

δ) Το πηλίκο των μονωνύμων -$\alpha^2\beta^3\gamma^4$ και $\alpha\beta^4\gamma$ είναι:

Α. Μονώνυμο Β. Πολυώνυμο Γ. Αριθμός Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

2. **Ποιες απο τις παρακάτω ποσότητες είναι μονώνυμα ; (Αν όχι , τότε γιατί ;)**

   $3\chi+\psi$, $3\chi\psi^7$, $\chi\psi^2\omega^{-1}$, $\frac{\chi\psi}{\omega}$, $\chi(\chi+1)$, $\sqrt{\chi\psi\omega^4}$

3. **Να βρείτε τον συντελεστή , το κύριο μέρος και το βαθμό σε καθένα από τα παρακάτω μονώνυμα .**

   $3\chi\psi\,.\,-2\chi\psi^2$, $\psi^3\omega^2$, $\chi\psi\omega$

4. **Να χωρίσετε τα παρακάτω μονώνυμα σε 4 ζεύγη ομοίων μονωνύμων**
   $3\chi^4\psi$, $4\chi\omega^2$, $-4\chi^3\psi^4$, $5\chi^3\psi^4\kappa$, $6\omega^2\chi$, $-4\psi\chi^4$, $\psi^4\chi^3$, $-\kappa\psi^4\chi^3$

5. **Να εκτελέσετε τις προσθέσεις , όπου αυτό είναι δυνατόν**

   α) $2\chi^3+5\psi^3$ β) $2\chi^3+6\chi^3$ γ) $4\chi^5\omega-7\omega\chi^5$ δ) $3\chi^5+4\chi^2$ ε) $\chi^4+3\chi^4$ ζ) $2\chi^2-2\chi^2$

   η) $\chi^2+\chi^2$ θ) $\chi^2+\chi$ ι) $\chi+\chi^3$ κ) $\chi^2-\chi$ λ) $3\chi^4-4\chi^4$ μ) $3\chi-3\chi^3$

6. **Να εκτελέσετε τις αναγωγές ομοίων όρων .**

   α) $3\chi^4-2\chi^3+5\chi^2-4\chi+3\chi^2+\chi^4$ β) $2\chi^2\psi+3\chi\psi^2+5\psi\chi-3\chi^2\psi^2+2\psi^2\chi+5\chi^2\psi-4\chi^2\psi^2-\chi\psi$

7. **Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς**

α) $(2\chi^2\psi)(-5\chi\psi^2)$ β) $(3\chi\psi\omega^5)(4\chi^4\psi^2)$ γ) $(-2\chi\psi)(-4\chi\psi)$ δ) $(-\chi\psi^3)(\chi^2\psi)$

8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός ως προς x και y
$4x^3y^6$				
$-3xy^2$				
$\frac{1}{3}x^4y^7$				
$\sqrt{2}\,x^4$				

ΣΥΝΘΕΤΑ - ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

9. Δίνονται τα μονώνυμα $(\alpha-2)x^2y^3$ και $3x^\mu y^\kappa$.

Να βρείτε τα α, μ, κ ώστε τα μονώνυμα να είναι:

i) ίσα ii) αντίθετα

10. Δίνονται τα μονώνυμα $\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)x^{\kappa-1}y^{\lambda+2}$ και $\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)x^{1-\kappa}y^{2\lambda-4}$

Να βρείτε τα α, κ, λ ώστε μονώνυμα να είναι:

i) όμοια ii) ίσα iii) αντίθετα

11. Δίνεται η παράσταση $2x^{\lambda-1}y^2-3x^2y^{1-\kappa}$.

Να βρείτε τις τιμές των κ,λ ώστε η παραπάνω παράσταση να είναι μονώνυμο.

12. α. Αν x=-2 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης x^4+x^2+1

β. Αν x=-2 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης x^2-3x+4

γ. Αν x=-2 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης x^3+1

δ. Αν x=7 Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $3+x+\sqrt{x+2}$

13. Να βρείτε τους ακέραιους κ,λ ώστε η παράσταση $A=3x^4y^{2\kappa-1}-8x^{\lambda+2}y^3$ να είναι μονώνυμο

1.3 1.4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

● **Πολυώνυμο**, ονομάζουμε ένα αλγεβρικό άθροισμα μονωνύμων ,όπου δύο τουλάχιστο από αυτά δεν είναι όμοια.

● **Όρους** του πολυωνύμου, ονομάζουμε τα μονώνυμα και συντελεστές του πολυωνύμου, ονομάζουμε τους συντελεστές των μονωνύμων.

● **Βαθμός πολυωνύμου** ως προς μία μεταβλητή (ή ως προς περισσότερες μεταβλητές του) λέγεται πιο μεγάλος βαθμός όλων των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή (ή ως προς τις μεταβλητές αυτές).

● **Πολυώνυμο μιας μεταβλητής**
Τα πολυώνυμα με μία μεταβλητή π.χ. $2x^3 + x^2 +-7$ για συντομία συμβολίζονται P(x) ή Q(x) ή A(x)
Αν ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής γραφτεί με την ανηγμένη του μορφή κατά τέτοιο τρόπο, ώστε οι εκθέτες της μεταβλητής να ελαττώνονται, τότε λέμε ότι είναι διατεταγμένο κατά τις **φθίνουσες** δυνάμεις της μεταβλητής του. Π.χ. $2χ^3+3χ^2-5χ+7$

Ο όρος με τον μεγαλύτερο εκθέτη λέγεται **μεγιστοβάθμιος** (δηλαδή το $2χ^3$ **)**, ενώ ο όρος μηδενικού βαθμού λέγεται **σταθερός** όρος (δηλ. το 7).
Ένα πολυώνυμο το λέμε **ομογενές** ως προς μερικές ή ως προς όλες τις μεταβλητές του, όταν όλοι οι όροι του είναι του ίδιου βαθμού ως προς τις μεταβλητές αυτές.

παράδειγμα

Πολυώνυμο	Βαθμός	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y
$A = 4x^5y^3 + 2x^6y$	8	6	3
$B = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$	4	4	-

● **Ίσα πολυώνυμα**
Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, **όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.**

παράδειγμα
Τα πολυώνυμα $(2-\alpha)x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ και $\beta x^2 + \gamma x + 1$ είναι ίσα , αν $\alpha = 2$ και $\beta = -5$,$\gamma=3$

2. ΆΘΡΟΙΣΜΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

● **Αναγωγή ομοίων όρων**
Αν σε ένα πολυώνυμο αντικαταστήσουμε τα όμοια μονώνυμα (αν υπάρχουν) με το άθροισμά τους, τότε λέμε ότι κάνουμε **αναγωγή ομοίων όρων**.
Η τελική μορφή η οποία δεν έχει όμοιους όρους, λέγεται **ανηγμένη** μορφή του πολυωνύμου.
Πολυώνυμο με δυο όρους το ονομάζουμε και **διώνυμο**. Πολυώνυμο με τρεις όρους το ονομάζουμε και **τριώνυμο**.

● **Άθροισμα πολυωνύμων**

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας :

● τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

● την αναγωγή ομοίων όρων

παράδειγμα

τα πολυώνυμα $A(x) = 5x^3 - 3x^2 - 7x - 1$ και $B(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$ έχουν άθροισμα ή διαφορά που βρίσκουμε ως εξής:

A(x)+B(x) $= (5x^3 - 3x^2 - 7x - 1) +$

$(3x^3 - 2x^2 + x) =$
$= 5x^3 - 3x^2 - 7x - 1 + 3x^3 - 2x^2 + x =$
$8x^3 - 5x^2 - 6x - 1.$

(Απαλείφουμε τις παρενθέσεις)
(Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

Όμοια, έχουμε

A(x)-B(x)

$= (5x^3 - 3x^2 - 7x - 1) - (3x^3 - 2x^2 + x)$
$= = 5x^3 - 3x^2 - 7x - 1 - 3x^3 + 2x^2 - x =$
$=2\,x^3 - x^2 - 8x - 1.$

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

- Για να πολλαπλασιάσουμε **μονώνυμο επί πολυώνυμο**, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

παράδειγμα

$$3x^2(2x^3 + 7x) = 3x^2 \cdot 2x^3 + 3x^2 \cdot 7x = 6x^5 + 21x^3$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε **δυο πολυώνυμα**, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

παράδειγμα

$$\left(2x^2 - y\right)\left(x^2 + xy - 2\right) = 2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot xy - 2x^2 \cdot 2 - y \cdot x^2 - y \cdot xy + y \cdot 2 =$$

$$2x^4 - 2x^3 \cdot y - 4x^2 - x^2y - xy^2 + 2y$$

- Όταν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή δυο πολυωνύμων, λέμε πολλές φορές ότι αναπτύσσουμε τα γινόμενα αυτά και το αποτέλεσμα το λέμε **ανάπτυγμα** του γινομένου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή επιλογή

α) Η αλγεβρική παράσταση $5x^2-3x^3+5-(7x^2-2x+1)$ μετά την απαλοιφή των παρενθέσεων και τις αναγωγές ομοίων όρων ισούται με:

Α. $-2x^2-3x^3+6-2x$ Β. $5x^2-3x^3+5-7x^2-2x+1$

Γ. $5x^2-3x^3+5-7x^2+2x-1$ Δ. Τίποτα από τα πάρα-πάνω

β) Το γινόμενο (α+β)(γ-δ) ισούται με:

Α. α+βγ-δ Β. αγ-βδ Γ. αγ-αδ+βγ-βδ Δ. αγ+αδ+βγ+βδ

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 2 και το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 4, τότε το πολυώνυμο P(x)·Q(x) έχει βαθμό 8.

β)Αν το πολυώνυμο P(x)·Q(x) έχει βαθμό 6 και το πολυώνυμο P(x) έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο Q(x) έχει βαθμό 2.

3. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;

$$A = 2x^4 + 4x^3 - \frac{1}{x} \quad , \quad A = x^3y - 2x^2y^2 + \sqrt{3}x + \frac{1}{2} \quad , \quad \Gamma = x^{-4} + 4x^{-3} - 2$$

Α ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

4. **Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων ως προς χ, ως προς ψ και ως προς χ και ψ μαζί**
α) $2\chi^3-4\chi+\psi$ **β)** $\chi\psi^2-4\chi^5\psi+\chi^2\psi^6-4\chi+\psi-3$ **γ)** $2\chi^3\psi+3\chi\psi^3-4\chi^2\psi^2+\chi-\psi+1$

5. **Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς**
α) $\chi(\chi+3)$ **β)** $3\chi(\chi-2)$ **γ)** $4\chi(2\chi-4)$ **δ)** $2\chi^3(\chi^2-3)$ **ε)** $4\chi(\chi^3-3\chi^2+4\chi-2)$

6. **Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς, να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων και να τακτοποιήσετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.**

α) $(x-3)(x+2)$ **β)** $(2x+3)(3x+4)$ **γ)** $(x^2-1)(x^2+1)$
δ) $(x+3)(x+3)$ **ε)** $(x^2+1)(x-2)$ **ζ)** $(x^2-3)(x+2)$
η) $(\chi^2+1)(\chi^3-2)$ **θ)** $(\chi^2+\chi-3)(\chi+2)$ **ι)** $(\chi^3-3)(\chi^2+2\chi-4)$
κ) $(x^2+5x+1)(x-2)$ **λ)** $(3x^2+1)(4x-2)$ **μ)** $(x^2+4x-1)(3x^2-6x-2)$
ν) $(x-3)(x+2)(x-5)$ **ξ)** $(2x-1)(4x+2)(x-1)$ **ο)** $2x(x+3)(x-4)$

7. **Να γίνουν οι πράξεις:** $3x^2-\left[\left(5x^3-x\right)+4x^2-\left(2x^2+6\right)\right]+\left(-2x^2-5x\right)$

8. **Να γίνουν οι πράξεις:** $-3\alpha\beta+\left(\alpha^2-2\beta^2\right)-\left[\alpha\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)=3\alpha^2\right]-\left(2\alpha^2+\beta^2\right)$

9. **Να γίνουν οι πράξεις :** $2\alpha\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)-2\alpha^2\beta$

10. **Να γίνουν οι πράξεις:** $\left(2x^2+8\right)\left(x^3+x^2+2\right)-\left(3x-1\right)\left(2x^2+x+1\right)$

11. **Δίνονται τα πολυώνυμα** $A=x^2-2x+1$, $B=2x^2-3$, $\Gamma=-x^3+5x^2-2$. **Να βρείτε τα πολυώνυμα**
α) $-2A+B-\Gamma$ **β)** $A.B$ **και στην συνέχεια την αριθμητική τους τιμή για** $x=-1$

12. **Δίνονται τα πολυώνυμα** $P(x)=2x+x^2+3$ **και** $Q(x)=x^2-5x-8$.
Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)+Q(x)$, $3\,P(x)-4Q(x)$ **και** $P(x)\big(Q(x)-2\big)$

13. **Να γίνουν οι πράξεις :** $-3\alpha^2+\left(-2\alpha+5\right)-\left[-\left(4\alpha^2-3\alpha\right)-8\right]$

14. **Να γίνουν οι πράξεις :** $3x\left(x^2-1\right)-4x^2\left(x-2\right)+4\left(x^2-1\right)$

15. **Να γίνουν οι πράξεις:** $3x\left(x^2-5\right)-4x^2\left(x^2+x+2\right)+4\left(x^2-2x\right)\left(x^2-1\right)$

16. **Να γίνουν οι πράξεις:** $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}-5x-\frac{1}{2}\right)$

Β ΣΥΝΘΕΤΑ - ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

17. Δίνονται τα πολυώνυμα $A=\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)x^{\kappa-1}y^{\lambda+2}+2$ και $B=\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)x^{1-\kappa}y^{2\lambda-4}+\mu-1$

Να βρείτε τα α, κ, λ,μ ώστε μονώνυμα να είναι ίσα .

18. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x)=(3\alpha-6)x^3+(\beta-2)x^2+(\gamma+1)x+3$ και $B(x)=2x^2+3x-\delta+2$. Να βρείτε τα α, β, γ,δ ώστε μονώνυμα να είναι ίσα .

19. Δίνεται η παράσταση $Q(x,y)=2x^{\lambda-1}y^2-3x^2y^{1-\kappa}+x^2-2$.

Να βρείτε τις ακέραιες τιμές των κ,λ ώστε η παραπάνω αλγεβρική παράσταση να είναι πολυώνυμο.

20. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-4x^2+3x-1$ και $Q(x)=x^4-2x^2+3$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $P(x)+Q(x)$ β) $P(x)-Q(x)$ γ) $P(-x)$

δ) $P(x)+P(-x)$ ε) $Q(2x)$ στ) $2P(x)+3Q(x)$

ζ) $P(x)\cdot Q(x)$ η) $P(-1)+Q(-1)$

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-1)x^3+2x^2+3\alpha x+4$

α) Για ποια τιμή του α το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού

β) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου όταν $\alpha=1$

γ) Για $\alpha=1$, να υπολογίσετε την παράσταση $P(2)+P(-2)$

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha^2-2\alpha)x^4+(\alpha^2-4)x^3+2(\alpha-2)x^2+\alpha x+3$

α) Για ποια τιμή του α το $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού

β)Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ,ώστε $P(0)=2012$

γ) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου όταν $\alpha=0$

δ) Για $\alpha=1$, να υπολογίσετε την παράσταση $P(1)+P(-1)$

23. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2+x-1$ και $Q(x)=x+2$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $P(2)\cdot Q(x^2+2)$ β) $P(x)-Q(x^2+x+2)$ γ) $P(-2)Q(2x-1)P(x)$

24. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-2\alpha x+1$, $Q(x)=x^2-x+1$ και $H(x)$ για τα οποία ισχύει : $Q(x)\cdot H(x)=P(x)$.

α. Να βρείτε τον βαθμό του $H(x)$.

β. Να βρείτε το α και το $H(x)$. .

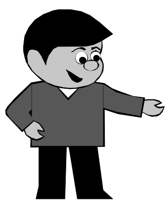
γ. Αν $A(x)=P(P(\kappa x))$ να βρείτε το κ ώστε $A(-1)=0$

1.5 ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Οι ταυτότητες είναι ισότητες που περιέχουν μεταβλητές και ισχύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.
Μας επιτρέπουν να εκτελούμε πράξεις με μεγαλύτερη ταχύτητα και ευκολία .
Οι κυριότερες είναι :



1. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$
4. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6. $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
8. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

2. ΣΥΜΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.
- $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$ **(Ταυτότητα Lagrange).**

Ερωτησεις - Ασκησεις Για Απαντηση

1. Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή επιλογή

α) Το $(2x-3)^2$ ισούται με:
Α. $4x^2+9$ **Β.** $4x^2-9$ **Γ.** $2x^2+9-12x$ **Δ.** $9+4x^2-12x$

β) Το $(-\alpha-\beta)^2$ ισούται με:
Α. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ **Β.** $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ **Γ.** $\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$ **Δ.** $-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$

γ) Αν $x+\frac{1}{x}=4$ τότε $x^2+\frac{1}{x^2}$ ισούται με:
Α. 16 **Β.** 4 **Γ.** 18 **Δ.** 14

δ) Το $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$ ισούται με:
Α. $\alpha^2+\gamma^2-\beta^2$ **Β.** $(\alpha+\gamma)^2-\beta^2$ **Γ.** $\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma-\beta^2$ **Δ.** Το Β και το Γ

ε) Το $(-x-y)(x-y)$ ισούται με:
Α. y^2-x^2 **Β.** x^2-y^2 **Γ.** x^2+y^2 **Δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

ε) Το $4x^2+\frac{1}{4}-2x$ ισούται με:
Α. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2$ **Β.** $\left(\frac{1}{2}-2x\right)^2$ **Γ.** $4x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **Δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

στ) Το $(x-y)^3$ ισούται με:
Α. $(y-x)^3$ **Β.** $(x+y)^3$ **Γ.** $(-x-y)^3$ **Δ.** $[x+(-y)]^3$

ζ) Το $(x+y)^2$ ισούται με x^2+y^2:
Α. Πάντοτε **Β.** Ποτέ **Γ.** Όταν $x=y=0$ **Δ.** Όταν $x=0$ ή $y=0$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $(x+1)^2=x^2+1$

β) $(\alpha+\beta)^2=(-\alpha-\beta)^2$

γ) $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha^2$

δ) $(x-y)^3=x^3-3x^2y-3xy^2-y^3$

ε) $(2x+3)^3=2x^3+3\cdot2x^2\cdot3+3\cdot2x\cdot3^2+3^3$

στ) $(3x-1)^3=(3x)^3-3(3x)^3\cdot1+3(3x)\cdot1^2+1^3$

A ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ… ΚΑΙ ΚΑΝΩ ΠΡΑΞΕΙΣ

3. **Χρησιμοποιώντας τις βασικές ταυτότητες ,να κάνετε τις πράξεις.**

1. $(\chi+3)^2 =$
2. $(\psi-2)^2 =$
3. $(\chi+1)^2=$
4. $(\alpha+2/3)^2=$
5. $(\chi+1/\chi)^2=$
6. $(\chi/3+\psi/2)^2=$
7. $(2\chi-3)^2=$
8. $(\chi+2\psi)^2=$
9. $(4\chi-3\psi)^2=$
10. $(\chi+3)(\chi-3) =$
11. $(2\chi-1)(2\chi+1)=$
12. $(4\chi-3\psi)(4\chi+3\psi)=$
13. $(\chi-2/\psi)(\chi+2/\psi)=$
14. $(\alpha/2-\beta/3)(\alpha/2+\beta/3)=$
15. $(\chi+2)^3 =$
16. $(\chi-1)^3 =$
17. $(3\chi-2)^3=$
18. $(\chi/2-3)^3=$

4. **Να γίνουν οι πράξεις:**

α) $(3x - 2)^2 - 4(2x - 1)(2x + 1)$

β) $(2x + y)^3 - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

5. **Να κάνετε τις πράξεις:**

1. $(x - 3)^2 + (2x -1)^2$
2. $(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 5)(x^2 + 5)$
3. $(x + y)^2 - (2x - y)(2x + y) + (2x\ y)^2$
4. $(x - 4)^2 + (x + 4)^2 - 2(3x - 1(3x +1)$
5. $(\alpha + 1)^3 + (\alpha - 1)^2$
6. $(\alpha -2)^2 - (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$
7. $(\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3$
8. $(4\alpha - 1)^3 - \alpha(\alpha + 1)(\alpha - 1)$

6. **Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:**

$(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = \chi^2 - \ldots.. + \psi^2$

$(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = \chi^3 - \ldots\ldots.. + \ldots\ldots.. - \psi^3$

$(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = \chi^2 + \ldots.. + \psi^2$

$(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = \chi^3 + \ldots\ldots.. + \ldots\ldots.. + \psi^3$

$(\chi - \psi)(\ldots. + \ldots.) = \ldots.. - \ldots..$

$\chi^3 - \psi^3 = (\ldots. - \ldots..)(\ldots.. + \ldots.. + \ldots..)$

$\chi^3 + \psi^3 = (\ldots. + \ldots..)(\ldots.. - \ldots.. + \ldots..)$

7. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

$(2\chi + 5)^2$

$(2\chi + 5)^2$

$(2\chi + 5\psi)^2$

$(\chi^2 + 1)^2$

$$\left(\frac{x^5}{5}+\frac{\psi^3}{3}\right)^2$$

$(\chi - 4)^2$

$(1 - 3\chi)^2$

$(3\kappa - 2\lambda)^2$

$(\chi^3 - 2)^2$

$$\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{3}{4}\psi\right)^2$$

8. **Να κάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (α + β)(α – β) = $α^2 – β^2$:**

$(χ + 3)(χ -3)$ $\qquad$ $(χ – 1)(χ + 1)$

$(2χ - 5)(2χ +5)$ $\qquad$ $(1 – 3χ)(1 + 3χ)$

$(2χ + 5ψ)(2χ – 5ψ)$ $\qquad$ $(3κ – 2λ)(3κ + 2λ)$

$(χ^2 + 1)(χ^2 – 1)$ $\qquad$ $(χ^3 – 2)(χ^3 + 2)$

$\left(\frac{x^5}{5}+\frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5}-\frac{\psi^3}{3}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi+\frac{3}{4}\psi\right)$

9. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

$(α + 1)^3$ $\qquad$ $(χ + 2)^3$

$(2α + 3)^3$ $\qquad$ $(1 + 3α)^3$

$(α + 5β)^3$ $\qquad$ $(3κ – 2λ)^3$

$(χ^2 - 1)^3$ $\qquad$ $(χ^3 – 2)^3$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$ $\qquad$ $\left(-\chi-\frac{1}{x}\right)^3$

10. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $\qquad$ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

$(-χ + 5)^2$ $\qquad$ $(-1 –χ)^2$

$(-2χ - 5ψ)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right)^2$

$(χ^{1002} - 1)^2$ $\qquad$ $(χ^κ – ψ^λ)^2$

$\left(\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\chi}\right)^2$ $\qquad$ $\left(2^{\alpha}-2^{\beta}\right)^2$

11. **Να κάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (α + β)(α – β) = $α^2 – β^2$:**

$(χ + 3)(χ -3)$ $\qquad$ $(χ – 1)(χ + 1)$

$(2χ - 5)(2χ +5)$ $\qquad$ $(1 – 3χ)(1 + 3χ)$

$(2χ + 5ψ)(2χ – 5ψ)$ $\qquad$ $(3κ – 2λ)(3κ + 2λ)$

$(χ^2 + 1)(χ^2 – 1)$ $\qquad$ $(χ^3 – 2)(χ^3 + 2)$

$\left(\frac{x^5}{5}+\frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5}-\frac{\psi^3}{3}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi+\frac{3}{4}\psi\right)$

12. **Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:**

$8x^3$ - ……. + ……. – 27 = (….. - ……)^3

1 + …….. + …….. + $χ^3ψ^3$ = (…… + …..)^3

$64α^6$ - …….. + …….. – $β^9$ = (……. - ……)^3

13. **Με τη βοήθεια της ταυτότητας $α^2 – β^2$ =(α – β)(α + β) να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:**

$Α = 200^2 – 190^2 =$ $\qquad$ $Β = 111^2 - 11^2 =$

$Γ = 47^2 – 43^2 =$ $\qquad$ $Δ = 7{,}55^2 – 2{,}45^2 =$

Β ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ…ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΩ ΙΣΟΤΗΤΕΣ

14. **Να αποδείξετε ότι:**

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$

$(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

15. **α) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:**

i) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

ii) $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A=(x+y+z)^2+(x+y-z)^2$

$B=(x-y+z)^2+(-x+y-z)^2$

16. **Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:**

α) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

β) $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=4$

γ) $\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)^3-\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^3=-\frac{9(\alpha^2+3)}{4}$

δ) $\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)^3+\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^3=\frac{2\alpha(\alpha^2+27)}{27}$

ε) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z+x)^2-x^2-y^2-z^2=(x-y+z)^2$

στ) $(3\alpha-\beta)^3+3(3\alpha-\beta)^2(\beta-\alpha)+3(3\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^3=8\alpha^3$

ζ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta-\gamma)^2-(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=8\beta\gamma$

17. **Να αποδείξετε ότι:**

i) $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

ii) $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$

Γ ΣΥΝΘΕΤΑ - ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

18. **Να κάνετε τις πράξεις:**

i) $(1-2x)^2 - x(-x-1)^2 + (2-3x)(2+3x)$

ii) $(\alpha+2\beta^3) - (2\alpha-\beta)^3 - (\alpha-\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta)$

iii) $(1-x)(1+x) + (x-2)^2 - (2x+1)^2$

iv) $(2x+1)(2x-1) + 1 - 2x^2$

19. **Αν $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\cdot\beta=4$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:**

i) $\alpha^2+\beta^2$ ii) $\alpha^3+\beta^3$

20. **α) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:**

i) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta$

ii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

iii) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

β) Αν $x+\frac{1}{x}=\alpha$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = x^2+\frac{1}{x^2}$ και $B = x^3+\frac{1}{x^3}$

γ) Αν $x-\frac{1}{x}=\beta$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A = x^2+\frac{1}{x^2}$ και $B = x^3-\frac{1}{x^3}$

21. **α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$.**

β) Αν $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \alpha+\beta+\gamma$, να δείξετε ότι η παράσταση
$A = (\alpha+1)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+1)^2-3$ είναι τέλειο τετράγωνο.

γ) Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

i) $(a-3)(a+3)(a^2-3a+9)(a^2+3a+9)$

ii) $(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

22. **Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ $B = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$**

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων Α , Β

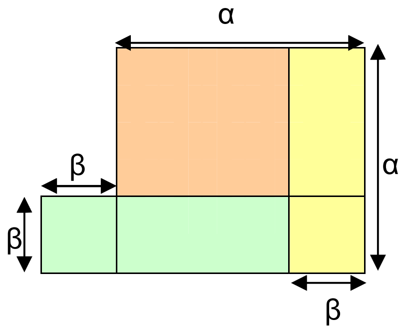
β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A\cdot B$ είναι ίση με 1

23. Έστω $\alpha=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ και $\beta=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των α , β.

β) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\alpha^2+\ \beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των α, β.

24. **Με την βοήθεια των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα να δείξετε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.**



20. **Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών είναι $2\sqrt{2}$.**

Να υπολογιστούν

α) Το άθροισμα των τετραγώνων τους.

β) Το άθροισμα των κύβων τους

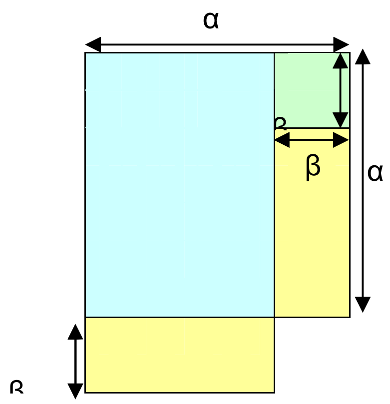
γ) Το τετράγωνο της διαφοράς τους

δ) Τη διαφορά τους.

21. **Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:**

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+........+999^2+1000^2-2\cdot\left(1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+.........+999\cdot1000\right)$$

22. **Με την βοήθεια των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα να δείξετε την ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.**



23. **Αν $α + β = χ – ψ = 2$, να δείξετε ότι οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων Α, Β είναι ίσες με 4.**

$A = (α^3 + β^3) – (α^2 + β^2) + 4αβ$.

$B = (χ^3 – ψ^3) – (χ^2 + ψ^2) – 4χψ$

24. **Αν $α^8 = β^8 + 2002$, να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:**

$(α – β)(α + β)(α^2 + β^2)(α^4 + β^4)$

25. **α) Να δείξετε ότι $\left(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}\right)^2=\kappa+\lambda+2\sqrt{\kappa\lambda}$**

β) Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς κ, λ ώστε $κλ = 3$ και $κ + λ = 4$

γ) Να κάνετε την παράσταση $4 + 2\sqrt{3}$ τέλειο τετράγωνο.

δ) Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του $4 + 2\sqrt{3}$

26. **α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(α + β + γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 +2αβ + 2βγ + 2αγ$.**

β) Αν $αβ + βγ + αγ = α + β + γ$, να δείξετε ότι η παράσταση

$Α = (α + 1)^2 + (β + 1)^2 + (γ + 1)^2 – 3$ είναι τέλειο τετράγωνο.

27. **Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων $α^2 +2αβ + β^2 =(α + β)^2$, $α^2 - 2αβ + β^2 =(α - β)^2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:**

$Α = 99^2 + 198 + 1 =$

$Β = 1001^2 – 2002 +1 =$

$Γ = (α – 1)^2 – 2(α^2 – 1) + (α + 1)^2 =$

$Δ = (3 – χ)^2 + (3 + χ)^2 - 2(χ^2 – 9) =$